
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
13 Sept. 1878.

Versuch einer richtigen Lehre

von der

REALITAET

der

vorgeblich imaginären Grössen der Algebra

oder einer

GRUNDLEHRE

von der Ablenkung algebraischer Grössenbeziehungen,

unternommen

Vilem von

WILHELM MATZKA,

Doctor der Philosophie, k. k. öffentl. ordentl. Professor der Mathematik und praktischen Geometrie an dem k. böhm. ständ. polytechnischen Institute zu Prag, vordem Prof. der Mathematik an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow, emeritirtem Lieutenant und Lehrer der höheren Mathematik und Mechanik im k. k. Bombardier-Corps zu Wien, Mitglied der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag.

Mit drei Figurentafeln.

Besonderer Abdruck aus den Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag
(V. Folge, Band 6.)



Prag, 1850.

In Commission der J. G. Calve'schen Buchhandlung.

Druck der k. k. Hofbuchdruckerei von Gottlieb Haase Söhne in Prag

I n h a l t.

Seite.

Berichtigungen.

Seite 2, Zeile 29, soll stehen l u c u l e n t e r; S. 10, Z. 15, vor das zweite A ein —; S. 43, Z. 14, statt $\pm\sqrt{b}$ setze man $+\sqrt{b}$; S. 51, Z. 11, statt des zweiten $\varphi'\psi$ s. m. $\varphi\psi'$; S. 75, Z. 13 ganz vorn fehlt α; S. 78, Z. 26, statt α s. m. a; S. 402, Z. 8, vor dem zweiten $\sqrt{5}$ s. m. —.

Vorrede.

Der Gegenstand vorliegender Schrift, Nachweis der Realität der für imaginär erklärten, oder Erweis der Möglichkeit und Darstellbarkeit der für unmöglich ausgegebenen algebraischen Grössen, welcher schon seit mehr denn einem Jahrhundert von verschiedenen Mathematikern in Erwägung gezogen und — wenn gleich anfangs ohne allen, später mit nur geringem Erfolg — zur öffentlichen Besprechung vorgebracht worden war, hat besonders seit dem Jahre 1844 bei deutschen nnd englischen Mathematikern eine auffallend grössere Würdigung sich errungen, und scheint sich seinen Stand in der Anwendung der Algebra auf Geometrie schon dermassen gesichert zu haben, dass der kritische Forscher ihn nicht füglich übergehen darf. Desswegen möchte es wohl ganz zeitgemäss sein, mit dieser, schon am Ende des Jahres 1845 in allem Wesentlichen vollendet gewesenen Monographie öffentlich hervorzutreten, die es sich zur vornehmlichen Aufgabe gestellt hat, den *Grundirrthum* der bisherigen Lehre vom Imaginären *schon im Lehrgebäude der Algebra* aufzudecken, und dafür richtige Grundansichten aufzustellen und zu vertheidigen.

In Betreff des *Entstehens* und allmälichen *Ausbildens* dieser meiner neuen Lehre möge es mir gestattet sein, folgende Thatsachen hier kurz anführen zu dürfen.

Der erste Anlass und Keim zu den in gegenwärtiger Abhandlung niedergelegten Grundlehren der Nichtunmöglichkeit der allgemein für unmöglich erklärten Grössen fällt in den Frühling des Jahres 1832, wo ich die von unserem scharfsinnigen *Gauss* kurz zuvor veröffentlichten Principien der räumlichen Darstellung und des Nachweises eines realen Substrates der sogenannten imaginären Grös-

sen durch meinen hochverehrten Freund und Lehrer, Professor und Regierungsrath Herrn Andreas von *Ettingshausen*, kennen lernte. Seit jenem frühen Zeitpunkte bin ich bei verschiedenen Gelegenheiten angeregt worden, diesen mir vielseitig lieb gewordenen Gedanken nachzuhängen, und sah der von *Gauss* verheissenen umständlichen Auseinandersetzung derselben mit Sehnsucht, aber stets vergebens entgegen.

Noch mehr wurde mein Interesse an der vollständigen Lösung des, im Wesen des Imaginären liegenden, Räthsels gesteigert, als ich im J. 1835 die von der fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig hierüber aufgestellte Preisfrage las. Seither verfolgte ich alle Bücheranzeigen, literarische Berichte und Zeitschriften, deren ich habhaft werden konnte, aufs eifrigste wegen Nachricht von der Beantwortung dieser Frage, aber immer erfolglos.

Im Sommer 1837, wenige Wochen vor meiner Übersetzung von Wien hieher, ersann ich die Anwendbarkeit der Gauss'ischen Ansichten auf das geometrisch-constructive Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren und Potenziren ganzer complexer Zahlen (§. 105, 106, 108 112, 113), so wie auch auf die analytische Geometrie in der Ebene, und bei Anwendung rechtwinkliger Coordinaten, besonders bei der Berechnung der Zwischenweite von Punkten und bei den Gleichungen der Kegelschnittslinien (§. 101, 102).

Allein alle solche geometrische Constructionen des Imaginären vermochten doch keineswegs mich, gleich meinen Vorgängern, über den *Widerspruch* zu beruhigen, in welchen sie jedenfalls die Algebra mit der Geometrie bringen; da die Algebra vorerst die Undenkbarkeit, die Geometrie dagegen hinterher wieder die Möglichkeit und Darstellbarkeit der geradzähligen Wurzeln aus negativen Zahlen erweist. Desshalb war mein Sinnen und Streben vor allem Andern dahin gerichtet, *schon in der Algebra die vollgiltige* und bisher nur verkannte *Möglichkeit* oder Denkbarkeit *dieser* s. g. *unmöglichen Wurzeln nachzuweisen.*

Nach langem vergeblichen Abmühen verfiel ich endlich im Frühling 1844 auf den *Grundfehler* (§. 21) *des bisherigen Beweises der Unmöglichkeit dieser Wurzeln,* und auf die Zulässigkeit noch eines zweiten gleichartigen Paares einander entgegengesetzter algebraischer *Beziehungen* ausser dem bisher einzig und allein zugestandenen Paare; so dass ich wenigstens von je zwei sich *kreuzenden Paaren* solcher Beziehungen die Annehmbarkeit *darzuthun* vermochte. Allein hier stellte sich mir die

neue Schwierigkeit entgegen, dass lediglich *Ein* Paar rechtwinkliger Axen mit ihren zwei gekreuzten Paaren entgegengesetzter Richtungen, also bloss in der Geometrie, und selbst da nur ein eingeschränktes, wenn gleich vielfältige Anwendung gestattendes, räumliches Gebilde, solche neuartige Systeme von Beziehungen darbiete; während doch die Lehre von den Wurzeln überhaupt schon in der *allgemeinen* Grössen- und Zahlenlehre, nicht aber erst in einem Zweige der *besondern* Grössenlehre ihre volle Begründung erhalten muss. Es kam daher vor Allem noch darauf an, solche Beziehungen auch ausser dem Bereiche der Geometrie aufzudecken (wie in §. 22, 23, 25).

Bei der hiernach versuchten ordnungsmässigen Zusammenstellung meiner, bloss die zweitgradigen imaginären Wurzeln zu erklären fähig gewesenen, Lehre von der Kreuzung mancher Doppelpaare von Grössenbeziehungen verfiel ich endlich im December 1844 und Anfangs Jänner 1845 auf die nicht allein an räumlichen, sondern auch an anderartigen Gegenständen vorkommenden *abweichenden* oder *ablenkenden Beziehungen.* Erst mit diesem *leitenden Grundbegriffe* der *Ablenkbarkeit der algebraischen Grössenbeziehungen* erhielt meine Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen ihre volle Begründung und Allgemeinheit, so dass ich glaube, mir die Aufstellung derselben, gewiss ohne unbescheidene Überschätzung, zu einem der höchsten und erfreulichsten Verdienste um die Vervollständigung der wissenschaftlichen Mathematik anrechnen zu dürfen.

Eine nächste, wenn gleich nicht unbedingt nothwendige, Anwendung meiner aus der Algebra geschöpften Lehre blieb die *geometrische Construction* der sonst für imaginär ausgegebenen oder eigentlich der ablenkend beziehlichen Grössen, so wie aller Grundrechnungen mit ihnen. Sie und die für die Drucklegung bemessene ordentliche Ausarbeitung meiner Schrift beschäftigte mich in dem nachgefolgten Sommer 1845, und bildet den grössten Theil des 5. Hauptstücks meiner Lehre.

Besonders hiezu hätte ich nun sehr gern die Ansichten der vor *Gauss* mit der Construction des Imaginären aufgetretenen Geometer, als: *Kühn*, *Buée*, *Mourcy* und *Warren* kennen gelernt; allein trotz meiner Geldopfer und Anstrengungen auf sechs verschiedenen Wegen vermochte ich mir vom Anfang des J. 1845 bis Mitte 1846 keine ihrer Abhandlungen weder käuflich noch darlehnlich zu verschaffen, sondern ich musste mich lediglich theils mit brieflichen Mittheilungen gefälliger Freunde, theils mit Notizen aus anderen Schriften behelfen; was mir zwar eine genügende Kenntniss des Wesentlichen jener Ansichten gewährte, aber doch immer die Details missen liess.

Erst im August 1846 erhielt ich — so wie schon früher andere Werke — *Kühn's* höchst lesenswerthe Abhandlung in den Petersburger Commentarien, auf gnädige Bewilligung des hohen Landesguberniums aus der Lemberger k. k. Universitäts- Bibliothek durch ihren äusserst gefälligen Bibliothekar Herrn Franz Ritter von *Stroński*. Endlich wurde mir auf einen Brief vom 15. Juli 1846, durch angebotene gütige Vermittelung des k. k. Hofbuchhändlers *Peter Rohrmann* zu Wien, am 20. Februar 1847 die überraschende ungemeine Freude zu Theil, von Herrn *John Warren* aus Hundington in England, mit echt brittisch grossmüthiger Denkweise, seine drei Abhandlungen geschenkt und *Mourey's* Werkchen *geliehen* (!) zu erhalten; wofür ich beiden Herren meinen verbindlichsten Dank hier öffentlich auszusprechen Gelegenheit nehme. *Buées* Aufsatz hingegen vermochte ich mir, so weit ich auch gegangen war, nicht zu verschaffen.

Inzwischen hatte mir das Jahr 1846 nebst mancherlei Unheil auch in Bezug auf diese meine Arbeit eine herbe Kränkung gebracht, die mich fast zum Entschlusse vermocht hätte, das undankbare Abmühen mit ihr gegen lohnendere Studien zu vertauschen; dessen ungeachtet brachte ich es endlich doch wieder über mich, auch daraus einigen Vortheil zur Vervollständigung meiner Lehre im 6. und 7. Hauptstücke zu ziehen. Allein kaum hatte ich diese nach jener Aufmunterung durch Herrn *Warren* — besonders da er in seinem Schreiben erwähnt, „dass der hier behandelte Gegenstand seit den letzten Jahren viele Mathematiker Englands interessire und bei der im J. 1845 zu Cambridge stattgehabten Versammlung der brittischen Gesellschaft der Wissenschaften bedeutend die Aufmerksamkeit auf sich gelenkt habe“ — im März und April d. J. im Entwurfe nahe ausgearbeitet, als ein häusliches Unglück nach dem andern mich verfolgte, von denen das härteste und nachhältigste der während der Krankheit meiner ganzen Familie im Wonnemonat erfolgte Hintritt meiner vortrefflichen Frau war, das mir Gemüth und Geist aufs tiefste darniederdrückte und mich nur sehr spät wieder zum Entschlusse kommen liess, meine mehrmals unterbrochene Arbeit noch in diesem Jahre (1847) zu vollenden; was mir erst am Schlusse desselben gelingen durfte.

Die *Behandlung* und *Darstellung* meiner Lehre betreffend war ich sorgfältigst bemüht, alle Grundbegriffe durch gerechtfertigte Erklärungen vollkommen festzustellen, die auf sie gestützten Lehrsätze folgerecht zu reihen, sämmtliche Beweise mit strengster Gründlichkeit zu führen, und jeden nur einiger Massen schwierigen und strittigen Gegenstand aufs umständlichste zu erörtern. Zugleich leitete ich das Ganze so

ein, dass die eigentliche Lehre von der Ablenkung algebraischer Grössenbeziehungen, das Potenziren nach ablenkend beziehlichen Exponenten mit der von ihr bedingten analytischen Goniometrie, und die auf letztere gestützte vollständige Lehre von den höheren algebraischen Gleichungen in die Lehrbücher der Algebra, wohin sie doch eigentlich gehören; dagegen die Lehre von der räumlichen Darstellung der ablenkenden Grössenbeziehungen in die Lehrbücher der Geometrie aufgenommen werden können; wenn dereinst diese neuen Ansichten — wie ich wünsche und hoffe — genug Beifall und Verbreitung sich errungen haben werden.

Dabei kann es wohl nimmer befremden, dass in einer Schrift, die so sehr an Philosophie der Mathematik streift und eingewurzelte irrige Ansichten und Rechnungsvorgänge zu bekämpfen unternimmt, hie und da die kalte Schul- und Lehrsprache in die wärmere der Streitschriften übergehen musste; doch glaube ich mich versichert halten zu dürfen, dass jeder Billigdenkende die hier eingehaltene Sprache, vornehmlich in Vergleich mit jener in ähnlichen Werken, sattsam gemässigt und nirgends beleidigend finden werde, zumal ich stets nur Hervorhebung der Wahrheit, nie aber Herabwürdigung fremden Wissens und Verdienstes beabsichtigte.

Auch darf ich nicht unerwähnt lassen, dass diese Monographie nicht allein für den Gelehrten von Profession, sondern auch für Anfänger und Lernende, so wie selbst für Freunde der Mathematik, denen ihre Verhältnisse nicht immer zu tieferem Grübeln die erforderliche Musse gönnen, bestimmt und darum so ausführlich abgefasst ist, dass auch die Letzteren eine sattsame Erörterung jedes einzelnen Gegenstandes darin finden. Dem Gelehrten kostet es wohl wenig Mühe, aus einer umständlichen Zergliederung den kurzen Grundgedanken herauszufinden, oder was ihm überflüssig scheint zu übergehen; dem Anfänger oder Dilettanten hingegen bleibt es meistens unmöglich, etwas wegen allzu grosser Kürze Undeutliches sich ausführlicher zu erörtern, oder Mangelndes hinzuzufinden. In derlei Streitschriften hat überdiess die übermässige Gedrungenheit der Schreibart noch den entschiedenen Nachtheil, dass sie selbst von Gelehrten leicht entweder gar nicht oder wenigstens missverstanden werden, und dadurch zu unnützem Wortstreit Anlass geben.

Dass Werke, wie das vorliegende, die eine eigene Bahn zu brechen zur Aufgabe haben, auf eine sogleiche und allgemeine Anerkennung nicht zählen dürfen, verhehle ich mir um so weniger, als ich missglückte Vorgänger in nicht geringer Menge vor mir sehe; zweifle jedoch nicht, dass der Widerspruch, den das hier dargebotene Werk hervorrufen dürfte, sich lediglich auf dem Felde der strengen

Wissenschaft bewegen werde, wie diess zum Ruhme unseres deutschen Volkes immer mehr guter Ton wird. Möchte nur wenigstens die Anerkennung meiner Schrift nicht allzuweit hinter jener aufopfernden Anstrengung zurückbleiben, mit der ich — in der Absicht zur Aufhellung der noch vorhandenen Dunkelheiten der mathematischen Wissenschaften mein Möglichstes beizusteuern — dieselbe zu Stande brachte.

Tarnow den 20. December 1847.

Wilh. Matzka.

Einleitung.

§. 1.

Die Lehre von den sogenannten *imaginären* (eingebildeten) oder unmöglichen *Grössen* oder Zahlen, denen entgegen man die anderen *reelle* (wirkliche) oder mögliche nennt, hat schon längst, zum Theil von sehr gründlichen Kritikern, die heftigsten Anfechtungen — und diess wahrlich nicht ohne triftige Gründe — zu erdulden gehabt*). Denn das Verfahren, wie man diese Grössen in die Algebra (elementare allgemeine Grössen- und Zahlenlehre) einführt und besonders in den höheren Partien derselben (in der Analysis) handhabt, indem man vorerst dort ihre Undenkbarkeit und Unmöglichkeit strengstens nachweist, nachher aber hier nichts desto weniger solches Unmögliche durch Zeichen darstellt, unterliegt, trotz dem, dass sogar höchst berühmte mathematische Autoritäten sich desselben bedienten, dem gegründetsten Tadel; da man sie auf solche Weise als allgemeine *Zahlformen*, die doch keine Zahl vorstellen, oder als *Zeichen* ohne ein Bezeichnetes, d. h. demnach als leere nichts sagende Schriftzüge, oder um mit gelehrteren Worten zu täuschen, als *Symbole* — Sinnbilder — die doch nichts Sinniges abbilden, folglich kurz als Undinge gleich mythologischen Gestalten, in die Rechnung einführte.

Andrerseits vermochte man aber auch wieder nicht die Richtigkeit der Ergebnisse so vieler rechnenden Forschungen, die sich der imaginären Zahlen zur Vermittelung bedienen, in Abrede zu stellen; zumal zu den meisten solchen Ergebnissen auch noch andere, das Imaginäre gar nicht berührende, Wege führen.

§. 2.

Um diese Nutzanwendung der imaginären Grössen zu rechtfertigen, haben mehrere Mathematiker, als *Buée*, *Mourey*, *Warren* und *Gauss* gezeigt, *dass und wie imaginäre Grössen sich geometrisch construiren lassen.* Die sie leitenden Grundgedanken sind:

1. Alle imaginären Rechnungsausdrücke lassen sich auf die $\sqrt{-1}$, von *Gauss* mit i bezeichnet, zurückführen.

*) Eine Zusammenstellung derselben findet man in der Schrift: Kritische Betrachtung einiger Lehren der reinen Analysis, welchen der Vorwurf der Ungereimtheit gemacht worden ist, von Dr. *Fr. Schmeisser*. 4. Frankfurt a. d. O. 1842. S. 24 — 28.

2. So wie $+1$ und -1 die entgegengesetzten Richtungen einer Geraden markiren, eben so weisen $+i$ und $-i$ auf die beiden entgegengesetzten Richtungen aller auf ihr senkrechten Geraden in einerlei Ebene hin.

Daraus nun meinten sie folgern zu dürfen, *dass durch diese Constructionen die Realität der imaginären Grössen dargethan werde.* Diese Ansicht theilte auch die fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig in dem *Programm* der von ihr im Jahre 1835 für das J. 1837 gestellten Preisfrage, welche hier in beiden Sprachen wortgetreu eingerückt werden soll.

Quantitatum imaginariarum non solum in analyticis sed etiam analytico-geometricis disquisitionibus usus nunc est satis frequens. Jam vero indigitavit Ill. *Gauss*, illas quantitates, quas *sub specie ficticiarum* solummodo *formarum* vulgo contemplari solent, negativarum instar quantitatum, *explicatione intuitiva non omnino esse expertes.* Fuerunt praeterea alii geometrae, e quibus inprimis nominandi sunt VV. Cll. *Buée, Mourey, Warren*, qui has quantitates, ubi in geometricis occurrerint, *construendas esse* docere conarentur. Quae tamen, quum *adhuc dubia videantur*, movet Societas quaestionem, possitne haec doctrina de constructione quantitatum imaginariarum ita firmari et excoli, ut, *quae lateant constructiones*, ubicunque geometrae quantitatibus illis usi sint, *e certis regulis explanari* possit vel, si rei natura hoc non concedit, *quibusnam conditionibus imaginaria liceat construere*, lucalenter appareat.

Wie bekannt, sind die imaginären Grössen gegenwärtig nicht nur in der Analysis, sondern auch in der analytischen Geometrie von häufigem Gebrauch. *Gauss* hat gezeigt, dass diese Grössen, denen man gewöhnlich *alle Realität abzusprechen* pflegt, gleichwohl *so wenig, als die negativen Grössen, einer Versinnlichung gänzlich entbehren.* Ausserdem haben andere Geometer, namentlich *Buée*, *Mourey*, *Warren*, zu beweisen gesucht, dass wenn man in geometrischen Untersuchungen auf imaginäre Grössen kommt, *sich* diese auch *immer construiren lassen*. Da diese Lehre jedoch *noch nicht allgemeine Anerkennung gefunden* hat, so wirft die Gesellschaft die Frage auf: ob die Lehre von der Construction der imaginären Grössen sich so begründen und ausbilden lässt, dass vermöge derselben *nach sicheren Regeln die Constructionen angegeben werden können, die überall*, wo sich die Geometer der imaginären Grössen bedienen, *versteckt liegen mögen;* oder wenn dies unmöglich, dass wenigstens die *Bedingungen* erhellen, *unter denen jene Grössen construirbar* sind.

§. 3.

Man hat jedoch hier *den Widerspruch übersehen*, in welchen die Mathematik bei solcher Behandlung der imaginären Grössen mit sich selbst geräth. Einerseits erweist sie in ihrer Grundlage, der allgemeinen Grössen- und Zahlenlehre — bald Arithmetik bald Algebra genannt — völlig streng, dass Wurzeln geraden Ranges aus negativen Zahlen — nicht Grössen — Unmögliches fordernde Rechnungsausdrücke, folglich durchaus *undenkbar* und

unmöglich sind; andrerseits dagegen zeigt sie in demjenigen ihrer *besonderen* Zweige, welcher Geometrie heisst, dass solche Wurzeln, trotz ihrer erwiesenen Unmöglichkeit, dennoch auf wirkliche Gegenstände des Raumes hinweisen, oder dieselben repräsentiren, somit selbst Wirklichkeit (Realität) besitzen.

§. 4.

Darin liegt der Grund der in dem oben citirten Programm eingestandenen Unentschiedenheit und geringen Anerkennung, so wie der von *M. W. Drobisch* (Grundzüge der Lehre v. d. höh. numer. Gleichungen, Leipzig, 1834, S. XVII) beklagten Gleichgiltigkeit, mit der das mathematische Publicum bisher die versuchten geometrischen Veranschaulichungen des Imaginären aufgenommen hat. Selbst nachdem ein *Gauss* die Grundlage dieser Theorie in wenigen, aber scharfen Zügen entworfen hat, scheint sie den meisten Mathematikern keine höhere Meinung abgewonnen zu haben, als dass solche Repräsentation der unmöglichen oder imaginären Grössen durch räumliche Gegenstände nichts Besseres als eine geistreiche Analogie, als eine zwar interessante, aber zufällige gegenseitige Hinweisung des Einen auf das Andere sei. Ja in manchen Kritikern vermochte sie nicht einmal diesen frommen Glauben anzuregen, so dass sich *Schmeisser* *) zu der Äusserung veranlasst fand: »Constructionen der sogenannten unmöglichen Grössen, wie solche Buée, Warren, Mourey versucht haben, *thun gleichsam bildlich den Irrthum dar*, der ihnen zum Grunde liegt. Wenn daher die Jablonowski'sche Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig auf ihre Preisfrage für 1837 keine Antwort erhalten hat, so *liegt diess in der Natur der Sache.*«

§. 5.

Spürt man der *Ursache des Scheiterns aller bisherigen Versuche* und Bemühungen der Mathematiker, in die Lehre von der Zulässigkeit imaginärer Grössen in den Rechnungen überzeugende Klarheit zu bringen und den Ergebnissen solcher Rechnungen unbezweifelbare Geltung zu verschaffen, sorgfältig nach: so findet man sie völlig entschieden in der Mangelhaftigkeit sämmtlicher bis nun zu in der Algebra aufgestellten Lehren theils von den negativen, theils von den imaginären Grössen.

Von den bisherigen *Lehren des Negativen* in der allgemeinen Grössenlehre enthalten bloss jene von *Klügel* (Math. Wörterb. 2. Bd. 1805, Art. Entgegengesetzte Grössen, und früher: Hindenburg's Archiv d. Math., 1795, 3. u. 4. Heft) und wenn man nicht durch neue Benennungen sich beirren lässt, die von *Carnot* (Géométrie de position, Paris, 1803, deutsch v. Schumacher, Altona, 1808 — 10) wenigstens die wichtigsten Grundgedanken, welche zum Theil in die Lehrbücher von *Pasquich*, *Knar* und *Uhde* übergingen. Die Neuzeit dagegen, zumal jene, die da nur Buchstaben, ohne sich darunter Grössen oder Zahlen vorzustellen, und Rechnungszeichen eben so zusammenschreibt und ihre Gruppen von Schriftzügen ge-

*) in der (oben in §. 1) angeführten Schrift v. J. 1842, S. 27.

rade so benamset, wie sonst Algebraisten zu thun pflegen, hat auf diesem Gebiete gar nichts Haltbares aufzuweisen.

In die *Lehre vom Imaginären* dagegen hat — was kaum glaublich scheinen wird — *ein völlig grundloses Axiom* (§. 21) *sich eingeschlichen* und darin so allgemein festen Boden gefasst, dass es nicht bloss von allen Freunden und Lehrern, sondern auch von den heftigsten Gegnern dieser Lehre, ohne irgend eine Ausnahme, mit ähnlicher Täuschung dahin genommen wurde, wie ehedem der Wahn, dass die Sonne gehe und die Erde stehe, in der Denkweise der Menschheit fest gewurzelt stand. Zudem hat man bisher nur mit der Erforschung der imaginären Wurzeln *zweiten* Ranges, auf die sich freilich alle anderen zurückführen lassen, sich begnügt, keineswegs aber die ganze Lehre vom Imaginären in sich abzuschliessen und abzurunden sich bemüht.

§. 6.

Indem wir sonach die Frage nach der Art und Weise der Construirbarkeit des Imaginären in die *höhere und ihr doch eigentlich vorschwebende Frage nach der muthmasslichen Realität dieses nur irrthümlich so genannten Unmöglichen* umwandeln, und *die richtige Lehre dieses Gegenstandes aufzustellen und zu begründen* beabsichtigen; muss unser Hauptaugenmerk zuvörderst auf folgende Punkte gerichtet sein:

1. auf einen richtigen *Begriff* des Positiven und Negativen, des Realen und Imaginären in der Algebra,

2. auf die Feststellung der *Gegenstände*, denen diese Merkmale zukommen, und

3. auf die *Bedingungen*, unter denen sie sich an ihnen vorfinden. Dass hierbei die Verwerfung mancher bisher üblichen Benennungen und Zeichen, und damit die Einführung einiger neuen, nicht umgangen werden kann, bringt die Natur der Sache mit sich.

§. 7.

Sollte es uns gelingen, die Richtigkeit unserer neuen Lehre über allen gegründeten Widerspruch zu erheben; so bleibt es für selbe gleichgiltig, ob ihr Gegenstand, das Imaginäre, sich räumlich nachweisen und abbilden lasse oder nicht. Denn obwohl es nicht Gebrauch ist, die reellen Rechnungsformen der Algebra geometrisch zu construiren; so hat doch noch niemand an der vollständigen Giltigkeit derselben gezweifelt, da sie auf anerkannt zulässigen Begriffen ruhen.

Wenn wir nun auch der geometrischen Construirbarkeit der als unmöglich und undenkbar nachgewiesenen sogenannten imaginären Grössen, so wie sie bisher gelehrt und anerkannt worden ist, schlechterdings alle *Beweiskraft* für die Realität und Existenz dieser Grössen abzusprechen uns gedrungen fühlen; so werden wir gleichwohl, nachdem wir diese Realität *vorerst in der Algebra* über allen Zweifel erhoben haben werden, dieses unschätzbare Mittel der *Verdeutlichung* und *Überzeugung* keineswegs verschmähen, um unsere Lehre zur klaren und deutlichen Anschauung und Verständlichkeit zu bringen.

Erstes Hauptstück.

Grundzüge der Lehre vom Gegensatze algebraischer Beziehungen der Grössen.

§. 8.

Die beiden einander entgegengesetzten (sich gegenseitig aufhebenden) Grundrechnungsweisen, das Addiren und Subtrahiren, kommen häufig theils verbunden vor, theils werden sie an und gegen einander gehalten. Darum ist es zur Übersichtlichkeit und Abkürzung der Rede rathsam, sie nach *Klügel's* mit Unrecht zu wenig beachtetem Vorschlage (Math. Wörterb. 1. Bd. 1803, S. 374) unter der Benennung *Aggregiren* in Eine Gattung Rechnens, als ihre einzelnen Arten, zusammenzufassen; wofür wir jedoch zuweilen zur deutlicheren Bestimmung das bezeichnendere »Imputiren, An- oder Aufrechnen« gebrauchen werden, weil diess nicht nur vom Guten, sondern auch vom Bösen gesagt wird.

Mehrere gleichartige *Grössen aggregiren* heisst demnach, einige derselben addiren, andere dagegen abziehen. Das Ergebniss der Aggregation nennt man das *Aggregat* (zusammengesetzten Ausdruck) der Grössen, diese selbst *aggregative Grössen*, *Aggreganden* oder *Glieder*. Die Aggregationsweisen zweier Grössen oder derselben Grösse in zwei Fällen können demnach entweder *einerlei* (identisch) oder aber verschieden, *entgegengesetzt* sein.

§. 9.

Bei der Auslegung von Grössenunterschieden, deren Subtrahend grösser als der Minuend ist, wird man in der allgemeinen Grössenlehre auf mancherlei gepaarte *Beziehungen* (Relationen), Bedingungen, Beschaffenheiten (Qualitäten), Sinne, Bedeutungen, Rücksichten, Zustände, Umstände u. dgl. hingewiesen, die so geartet sind, dass gewisse Grössen, oder die sie vorstellenden Zahlwerthe oder Masszahlen, so oft *eine* von solchen dualen Beziehungen besteht, zu *addiren*, dagegen so oft die *andere* Beziehung besteht, zu *subtrahiren* sind.

Diese Eigenschaft nennt man den *Gegensatz* oder *Widerstreit* solcher gepaarter Beziehungen der zu betrachtenden Grössen oder ihrer sie stellvertretenden Zahlwerthe; je ein Paar dergleichen Beziehungen einander *entgegengesetzt* oder *widerstreitend*, und *einerlei* Beziehungen mehrerer Grössen auch *ein-* oder *gleichstimmig*.

Beispiele derartiger Beziehungen, wie Vermögen und Schuld, Vorwärts und Rückwärts, Rechts und Links, u. v. a. sind aus den Lehrbüchern sattsam bekannt. In abstracten Rechnungen und mathematischen Forschungen, in denen man auf die Besonderheit der Bedeutung der allgemeinen Grössezeichen (Buchstaben) nicht achtet, gelten als allgemeine

(universelle) gegensätzliche Aggregationsbeziehungen: Zusatz (Zugabe) und Wegnahme, Vermehrung und Verminderung, Vergrösserung und Verkleinerung, Wachsthum (Zunahme) und Abnahme u. dgl., überhaupt Addition und Subtraction.

§. 10.

Die Lehre von dem allgemeinen Rechnen mit Grössen oder die allgemeine Grössenlehre wird, so lange sie solche Paare gegensätzlicher Beziehungen unbeachtet lässt, *Arithmetik*, und sobald sie selbe berücksichtiget, *Algebra* (im weitern Sinne*) genannt. Desswegen nennt man auch das Betrachten der Grössen in derlei dualen Relationen, so wie das Rechnen mit ihnen, ein *relatives* (beziehliches, bezügliches,) oder auch ein *algebraisches*; dagegen das Betrachten der Grössen ausser solchen Beziehungen, an und für sich, so wie sie sind, oder vielmehr ohne Rücksicht auf eine derlei Beziehung, und auch das Rechnen mit ihnen, *absolut*, irrelativ (beziehungslos, unbeziehlich), oder *arithmetisch*.

Danach nennt man den erklärten, die Behandlung derselben Grössen im Aggregiren betreffenden Gegensatz der Beziehungen, also auch diese Beziehungen selbst, *algebraisch;* gewiss bezeichnender *aggregatorische*, Aggregations- (oder Imputations-, Anrechnungs-) Beziehungen. Und je nach den angeführten Umständen heissen auch die Grössen selbst *algebraisch beziehliche* (bezogene), oder *absolute* (unbezogene) Grössen.

Das *Entgegengesetztbeziehliche einer Grösse* ist also eben diese oder eine ihr gleiche in der entgegengesetzten Beziehung vorkommende oder genommene Grösse; und zwei algebraisch betrachtete Grössen werden entweder *ganz gleich*, oder aber *entgegengesetzt gleich* genannt, wenn sie an und für sich genommen jedenfalls gleich gross, aber dort einstimmig, hier entgegengesetzt beziehlich sind.

§. 11.

Von jedem Paar entgegengesetzter Beziehungen, in denen gewisse Grössen betrachtet werden, wird jederzeit eine in der Anlage einer Rechnung oder mathematischen Forschung, ursprünglich, oder schon von vornherein angenommen, voraus- oder festgesetzt, oder von beiden wird bei ihrer Vergleichung die eine gesetzt (zuerst gedacht), und ihr die andere entgegengesetzt. Desswegen nennt man jene ursprünglich gesetzte Beziehung die *positive*, affirmative (bejahende) oder *Grundbeziehung*, und die andere, also die der positiven entgegengesetzte, die *negative* (verneinende); und danach auch jedwede Grösse *positiv* oder *negativ beziehlich*, je nachdem die Beziehung, in der sie erscheint, positiv oder negativ ist.

§. 12.

Die angeführten Beschaffenheiten und Benennungen der algebraischen Beziehungen der Grössen *übertrug man bisher auf die Grössen selbst*, und sprach von arithmetischen und algebraischen, entgegengesetzten und einstimmigen, positiven und negativen *Grössen*, so wie

*) Im engern — eigentlich nutzlos zu engen — Sinne nennt man die Lehre von den Gleichungen *Algebra*.

vom Entgegengesetzten einer Grösse. Aus dieser *Verwechslung* quollen jedoch bis auf den heutigen Tag zahllose Irrthümer, Missverständnisse und Streite in der Algebra. Darum muss man als *oberstes Princip der Algebra* aufstellen und festhalten:

Nicht die Grössen, sondern gewisse gepaarte *Beziehungen* der Grössen, sind einander *entgegengesetzt*, die eine positiv, die andere negativ; daher die Grössen selbst *entgegengesetzt beziehlich*, die einen *positiv beziehlich*, die anderen *negativ beziehlich*.

Dass in der Algebra an den Grössen nicht bloss ihre Grösse (ihr Wiegross, Betrag oder Werth), sondern auch ihre Beziehung oder Bedingung in Absicht auf Aggregation beachtet, aber Jedes vom Anderen genau unterschieden werden muss, haben zwar schon manche Mathematiker obenhin angedeutet, aber keiner hat diess mit dem nöthigen Nachdrucke ausgesprochen und mit jener unbeugsamen Festigkeit beibehalten, wie es in vorliegender Abhandlung geschehen wird. (Vergl. *L'Huillier* Princip. calc. diff. et integr., 1795, p. 100, *Carnot* Geom. d. Stell. 1. Thl. S. 20, *Klügel* Math. Wörterb. 2. Thl. S. 104, u. a.)

§. 13.

Der Gegensatz zweier Aggregationsbeziehungen von Grössen tritt in zweierlei Weisen auf.

1. *Die erste und allgemeine Weise* betrifft *zwei* mit einander verglichene *verwandte mathematische Forschungen*, Auflösungen ähnlicher Rechnungsaufgaben, u. dgl., welche die nämlichen Grössen betrachten, aber darin von einander sich unterscheiden, dass gewisse Grössen in der einen Forschung in einer bestimmten Beziehung, in der anderen Forschung aber in der entgegengesetzten Beziehung vorkommen, und desswegen in beiden Forschungen oder Rechnungen entgegengesetzt aggregirt werden; wie z. B. die analytische Untersuchung der Ellipse und Hyperbel. Von solchen zwei verwandten Fällen mathematischer Forschung kann man den einen als *vorbildlichen*, Normal-, Ur- oder Musterfall, und den andern als *nachgebildeten* oder abgeleiteten anschauen.

2. *Die zweite und besondere Art* algebraischen Gegensatzes tritt da ein, wo in *einer* und *derselben* Forschung eine gewisse zu bestimmende oder auszudrückende Grösse um eine aus zwei mit ihr gleichartigen Grössen vergrössert, um die andere aber verringert wird, folglich von diesen zwei Grössen die eine zu addiren (additiv), die andere dagegen zu subtrahiren (subtractiv) ist; weil eine aus ihnen unter der einen, die andere aber unter der anderen von zwei entgegengesetzten Beziehungen erscheint. So z. B. werden in der Berechnung des Besitzstandes eines Menschen eine Schuldpost und eine Forderungspost entgegengesetzt aggregirt.

Demnach werden in der ersten Weise die Beziehungen *Einer* Grösse in *zweierlei* Forschungen,
„ „ zweiten „ „ „ *zweier* Grössen in *Einer* Forschung,
in beiden Weisen also jedesmal *zwei Beziehungen* an einander gehalten, und nach Umständen für *entgegengesetzt* oder für *gleichstimmig* (identisch) befunden.

§. 14.

Dass aus diesen beiden Arten Gegensatzes von Grössenbeziehungen *die zweite nur eine Besonderheit der ersten* ist, erkennt man sogleich und mit Leichtigkeit, wenn man erwägt, dass sich bei der zweiten Art zu dem der Betrachtung vorliegenden Falle mathematischer Forschung jedesmal noch ein anderer vorbildlicher so denken lässt, dass in diesem Musterfalle jene zwei in der eigentlich vorschwebenden Forschung entgegengesetzt zu aggregirenden Grössen in einerlei Weise aggregirt (beide addirt oder beide subtrahirt) werden, z. B. in der vorher erwähnten Berechnung des Besitzstandes eines Menschen der Fall, wo dieselben zwei Posten entweder zugleich Schuld oder zugleich Forderung sind.

Man hat diese Verwandtschaft und Unterscheidung der Gegensätze algebraischer Grössenbeziehungen bisher entweder gar nicht beachtet oder wenigstens nicht hinreichend deutlich erkannt. *Klügel* und *Carnot* halten die beiden Arten solchen Gegensatzes für völlig verschieden in ihrer Wesenheit, während sie bloss in Unwesentlichem sich unterscheiden; die meisten Lehrbücher der Algebra gedenken nur der zweiten minder wichtigen Art, und verfehlen sich noch darin, dass sie »positiv« mit »additiv« und »negativ« mit »subtractiv« identificiren.

§. 15.

Die *Negativität*, so wie auch überhaupt den *Gegensatz* algebraischer Beziehungen von Grössen, bezeichnet man bekanntlich durch das den Grössezeichen vorgesetzte *Subtractionszeichen* (—); und die *Positivität*, so wie auch überhaupt die Einstimmigkeit derselben, durch das *Additionszeichen* (+) oder auch durch Weglassung aller Vorzeichen. Indem man demnach diese beiden Anrechnungszeichen (+ und —) als Beziehungs- oder Qualitätszeichen gebraucht; erweitert man den Begriff der Addition (Hinzusetzung) in den der »Satzung, Festsetzung, Grundlegung«, und den Begriff der Subtraction in den der »Entgegensetzung, des Gegensatzes«.

Hiedurch begründet sich die Angemessenheit dieser Beziehungszeichen und die Zulässigkeit der doppelten Bedeutung derselben; folglich auch die Freiheit, ein geschriebenes Aggregat nach Erforderniss bald arithmetisch bald algebraisch lesen und behandeln zu dürfen; und der Gebrauch, mit algebraisch — positiv und negativ — beziehlichen Grössen im Rechnen gerade so wie mit den additiven und subtractiven Gliedern zusammengesetzter Ausdrücke vorzugehen.

§. 16.

Nach diesen Ansichten lassen sich nun leicht die *regelwidrigen Unterschiede deuten*, in denen der Minuend kleiner als der Subtrahend ist.

1. *Lässt die Beziehung eines regelrechten Unterschiedes*, dessen Minuend wenigstens so gross als der Subtrahend ist, *eine entgegengesetzte zu*, wie z. B. bei der Berechnung des Vermögensstandes eines Menschen, Vermögen und Schuld, Einnahme und Ausgabe, u. dgl.; so ist ein solcher Unterschied, sobald sein Minuend kleiner als der Subtrahend, folglich

er selbst regelwidrig wird, der entgegengesetzt beziehliche umgewendete Unterschied, oder der nicht mehr in jener ursprünglichen (positiven), sondern in der entgegengesetzten (nunmehr negativen) Beziehung genommene Überschuss des Subtrahends über den Minuend.

2. *Lässt aber die Beziehung eines regelrechten Unterschiedes keine entgegengesetzte zu*, wie z. B. das Alter eines Menschen, Gesetzes, Gebäudes u. dgl., die Anzahl der Kinder einer Familie; so bleibt ein regelwidriger derartiger Unterschied unmöglich, sinnlos, unverständlich; geschrieben ein blosses, bedeutungsloses Rechnungsgebilde, oder ein Merkzeichen eines in der Grundanlage einer Rechnung unterlaufenen Widerspruchs der Voraussetzungen.

Um solchen sinnlosen Unterschieden wo möglich Deutung zu verschaffen, dient überhaupt zweckmässige Abänderung oder Verallgemeinung der Rechnungsfrage oder des algebraisch zu erforschenden Gegenstandes, und dadurch eigentlich der Aggregationsbeziehungen der in Betracht genommenen Grössen; wie z. B. wenn man anstatt nach dem Alter eines Menschen in einem gewissen Jahre vielmehr nach dem Abstande dieses Jahres hinter seinem Geburtsjahre frägt. Doch darf hierbei nicht übersehen werden, dass man nunmehr eine ganz andere Frage beantwortet, und dass, wenn eine widersinnige Frage, auf die sich nichts Vernünftiges antworten lässt, in eine verständige abgeändert wird, die nunmehrige vernünftige Antwort keineswegs jener sinnlosen Frage zugehört.

In abstracten Rechnungen werden alle regelwidrigen Unterschiede für verständlich oder deutungsfähig erachtet, weil sie auch in jenen Fällen bestehen müssen, wo die allgemein aufgefassten Grössen wirklich in entgegengesetzten Beziehungen erscheinen: oder weil solche Unterschiede sich auch als Ergebnisse von kleineren, aus einer grösseren Hauptrechnung ausgeschiedenen, Nebenrechnungen von Reductionen je eines additiven und eines grösseren subtractiven Gliedes, oder allgemeiner je eines positiv und eines an sich grösseren negativ beziehlichen Aggregands eines Aggregates, ansehen lassen; oder auch, weil sie manchmal angeben, um wie viel oder um was von einer hinzu gedachten oder wirklich hinzu kommenden hinreichend grossen Grösse *mehr* abgezogen als ihr zugefügt werden soll.

Gleich den regelwidrigen Unterschieden werden auch die an sich *unverständlichen Aggregate* gedeutet, weil Aggregate überhaupt als Unterschiede der Summe ihrer additiven und der Summe ihrer subtractiven Glieder angesehen werden können; und eben so auch die *negativ beziehlichen Wurzelwerthe* der algebraischen Gleichungen, weil dieselben, vor ihrer Darstellung als vereinzelte (isolirte) subtractive Aggregationsglieder, jedesmal auch als Unterschiede dargestellt werden können.

§. 17.

Auf diese Deutung der regelwidrigen Unterschiede und der negativ beziehlichen Wurzelwerthe der algebraischen Gleichungen gründet sich der hauptsächlichste Nutzen der Betrachtung und Lehre des Gegensatzes algebraischer Beziehungen der Grössen. Durch sie ist nämlich die Möglichkeit dargeboten, verwandte mathematische Forschungen oder Rech-

nungsfragen, in denen gewisse Grössen bloss durch die Verschiedenheit der Aggregation von einander sich unterscheiden — was man am deutlichsten durch Gegeneinanderhalten ihrer Grundbedingungen oder der dieselben aussprechenden uranfänglichen Beziehungs- oder Bestimmungsgleichungen kennen lernt — mit Leichtigkeit insgesammt auf einmal zu erledigen.

Zu diesem Zwecke führt man von solchen Forschungen bloss Eine als allgemeinen, Muster- oder Normalfall, als Vorbild aller übrigen, vollständig bis ans Ende durch; und benützt davon nur mehr das End-Ergebniss. Denn dass Ergebniss (die Schlussgleichungen) jeder anderen verwandten Forschung als eines besondern, abbildlichen oder wechselbezügigen (correlativen) Falles findet man, indem man

1. alle jene Grössen aufsucht und vormerkt, welche in diesem correlativen Falle *anders* als im Normalfalle aggregirt werden, also in entgegengesetzten, hier negativen, Beziehungen erscheinen oder negativ beziehlich werden;

2. in dem End- Ergebnisse des Musterfalles jede solche ihre Beziehung ändernde Grösse, A, durch ihr Entgegengesetztbeziehliches, A, ersetzt;

3. diese negativ beziehlichen Grössen gleich den subtractiven Aggregationsgliedern im Rechnen behandelnd, die Rechnungsausdrücke auf die möglich einfachste Form reducirt, und

4. endlich diese Schluss-Ergebnisse nach den oben aufgestellten allgemeinen Regeln gehörig auslegt.

§. 18.

Von den Rechnungen mit algebraisch bezogenen Grössen heben wir, für das uns vorschwebende Ziel, hier nur die *Multiplication und Potentiation* hervor.

I. *In der Multiplication* sind der angegebene *Multiplicand* und das zu suchende *Product* Grössen von was immer für einer, aber beide von einerlei Art; ihre algebraischen Beziehungen können jegliche, der Wesenheit dieser Art von Grössen anpassende Beziehungen der nämlichen Gattung, daher nur entweder einerlei — einstimmig — oder verschieden — entgegengesetzt — sein.

Der Multiplicator dagegen kann gemäss dem ihm aufgetragenen Geschäfte, gleiche Theile und Wiederholungen zu zählen, lediglich eine *Zahl* — oder wenn man die unschickliche und überflüssige Benennung „benannte, concrete Zahl" für „gemessene Grösse" nicht fahren lassen will, ausschliesslich eine „unbenannte, abstracte Zahl" *) — jeglicher Form, d. h. eine ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahl sein. Nach dieser, seine Grösse oder seinen Werth bestimmenden, Form gibt er an, wie mittels wiederholten Setzens und Zusammenfassens der Grösse des ganzen oder gleichgetheilten Multiplicands die Grösse des Products erzeugt werden solle. Ist der Multiplicator *beziehungslos* (absolut), oder eigentlich

*) Dass er darum schon eine unbeziehliche (*absolute*, irrelative) Zahl sein müsse, also nie eine algebraisch beziehliche sein dürfe, ist eine übereilte, irrige Folgerung mancher Schriftsteller.

wird die ihm anhaftende Beziehung nicht beachtet, so lässt diese seine Unbezogenheit (Absolutheit) erkennen, dass das Product gerade so, wie der Multiplicand, zu aggregiren oder algebraisch zu beziehen sei. Wenn er demnach *algebraisch beziehlich* auftritt, so muss seine Beziehung, falls sie *positiv*, so wie ursprünglich ist, andeuten, dass dem Producte *dieselbe* (einstimmige) Beziehung wie dem Multiplicand; dagegen, falls sie *negativ*, anders als ursprünglich ist, dass dem Producte die der Beziehung des Multiplicands *entgegengesezte* Beziehung beizulegen sei; oder kurz: *Die Beziehung des Productes ist jener des Multiplicands gleich oder entgegengesetzt, je nachdem die des Multiplicators positiv oder negativ ist.* — Man übergeht demnach von der gegebenen Beziehung des Multiplicands auf die zu suchende mit ihr gleichgeartete des Productes eben so, wie man von der Beziehungslosigkeit (Absolutheit, Irrelativität) oder von der Grundbeziehlichkeit auf die vorliegende Bezogenheit (Relativität) des Multiplicators übergeht; oder kurz, wie man von der positiven Beziehung zu der des Multiplicators gelangt.

Höchst wichtig ist hierbei die — meines Wissens bisher noch von niemand ausgesprochene — *warnende Bemerkung*, dass die algebraische Beziehung des Multiplicators als solchen, so wie sein Geschäft, jederzeit von der Beziehung des Multiplicands in der Art und Wesenheit verschieden ist; obwohl in mancher vorschwebenden Rechnungsfrage die Grösse, welche der Multiplicator, insofern er eine Zahl ist, in Bezug auf eine Messeinheit dieser Gattung von Grössen repräsentirt, immerhin auch von derselben Gattung und Beziehungsweise wie der Multiplicand sein kann. Denn der Gegensatz, die Positivität und Negativität der Beziehungen des Multiplicators besteht bloss entweder im Beibehalten, Belassen, oder im Abändern, Entgegensetzen der Beziehung des Multiplicands, wenn man von ihr auf jene des Productes übergeht; in der Einerleiheit oder Verschiedenheit, Einstimmigkeit oder Entgegengesetztheit der Beziehungen des Multiplicands und Productes. Wo aber verschiedene Arten von Beziehungen zu vergleichen kommen, wie hier die Beziehungen des Multiplicands und Multiplicators, da sind weder die positiven, noch die negativen verschiedenartigen Beziehungen unter sich einerlei, gleich oder einstimmig, sondern sie können nur *gleichnamig sein*; folglich sind auch nicht die positive Beziehung einer Art und die negative einer anderen Art ungleich, entgegengesezt, sondern nur *ungleichnamig*.

Man kann also mit keinerlei Recht Fragen der Art aufwerfen: „Was würde das wohl heissen, 4 Längenfuss nach einer gewissen Richtung mit einer nach derselben Richtung gelegenen 2 zu multipliciren?" wenn man die Multiplication von $+ 4$ Fuss mit $+ 2$ besprechen will; denn diese heisst ja: 4 positiv (z. B. südwärts) gerichtete Fuss 2 mal positiv, d. h. nach dieser ihrer Richtung, nehmen.

Die Beziehung des Productes zweier Factoren, einer Grösse — des Multiplicands — mit einer Zahl — dem Multiplicator — ist demnach in ihrer Art positiv oder negativ, je nachdem die Beziehungen beider Factoren unter sich gleichnamig oder ungleichnamig sind.

Sind endlich *mehr als zwei* algebraisch beziehliche *Factoren* mit einander zu multipliciren, so erschliesst man aus dem Bisherigen leicht den Satz:

Die Beziehung des Productes beliebig vieler Factoren ist positiv oder negativ, je nachdem die Anzahl der negativ beziehlichen Factoren gerad oder ungerad ist.

§. 19.

Da jede Potenz einer Zahl — genannt Dignand, Grundfactor, am besten *Potentiand* — nach einem absoluten oder positiven ganzzahligen *Exponenten* dem Producte aus 1 und so vielen mit dem Potentiand identischen Multiplicatoren gleich kommt, als der Exponent zählt; so ergeben sich aus voranstehenden Sätzen leicht die folgenden Grundlehrsätze über die Beziehungen der Potenzen:

1. Die Beziehung jeder Potenz *eines positiv beziehlichen Potentiands* ist *positiv.*

2. Die Beziehung einer Potenz *eines negativ beziehlichen Potentiands* ist *bald positiv bald negativ*, je nachdem der Exponent *gerad* oder *ungerad* ist.

Anmerkung. Für die nun aufzustellende Grundlehre der sogenannten imaginären Grössen wird diese gedrängte Darstellung des Gegensatzes algebraischer Grössenbeziehungen genügen; die ausführliche Entwicklung und Begründung der Lehre von diesem Gegensatze aber hoffe ich in einer besondern Schrift später darlegen zu können.

Zweites Hauptstück.

Grundlinien der Lehre von den imaginären Grössen, oder vielmehr von der Abweichung algebraischer Beziehungen der Grössen.

---

§. 20.

Die in den Lehrbüchern der Algebra übliche Einführung der imaginären Grössen.

Bei der Frage, wie die Vorzeichen der Wurzel aus den Vorzeichen der Radicande in allen möglichen Fällen zu bestimmnn seien, finde man bekanntlich zufolge der zuletzt aufgestellten Sätze und der Erklärung der Wurzeln, dass die Beziehung der Wurzel bei ungeraden Wurzelexponenten mit jener des Radicands übereinstimme, bei geradem Wurzelexponenten aber und bei positiv beziehlichem Radicand eben so wohl positiv als negativ sein könne. Endlich jedoch wird man genöthigt, folgenden Satz aufzustellen:

Eine Wurzel geraden Ranges aus einer negativen Zahl kann weder positiv noch negativ sein; daher ist sie *unmöglich.*

Der umständliche Beweis dieses Satzes lässt sich auf folgende Form bringen.

Die fragliche Wurzel muss, der Erklärung der Wurzeln gemäss, nach ihrem geraden Wurzelexponenten potenzirt ihren Radicand wieder geben. Allein jede Zahl, sie sei positiv oder negativ, gibt nach einem geraden Exponenten potenzirt nur eine positive, niemals eine negative Potenz. Mithin kann diese Wurzel weder positiv noch negativ sein. —

„Nun gibt es aber nur positive und negative Grössen“ *(Crelle)*, folglich *existirt* eine Wurzel geraden Ranges aus einer negativen Zahl *nie*, ist also immer *unmöglich*. (Lehrb. d. Algebra von *Appeltauer*, *Bourdon*, *Creizenach*, *Crelle*, *Egen*, *Grunert*, *Knar*, *Kramp*, J. *H. T. Müller*, *Salomon*, *Stein*, *Thibaut* u. a.)

Oder: „Hier soll man eine negative Zahl als Product einer geraden Anzahl von gleichen Factoren darstellen und einen solchen Factor angeben; folglich wird *Unmögliches* verlangt, weil das Product einer geraden Anzahl gleicher Factoren allezeit positiv ist, jeder Factor mag positiv oder negativ sein,“ *(Wunder)*, und weil ein solcher Factor, so wie überhaupt jede Zahl, nur entweder positiv oder negativ sein kann. (Vergl. *Öttinger*, *Schulz von Strassnicki*, u. a.)

Man nennt solche Wurzeln geraden Ranges aus negativen Zahlen *imaginär* (eingebildet), aber immer besser unmöglich, „weil man sich eine Grösse, die weder positiv noch negativ ist, auch nicht einmal einbilden kann.“ *(Egen*, vergl. auch *Kramp)*.

Andere Schriftsteller glauben mit sprachgebräuchlichem Benennen der anstössigen Rechnungsergebnisse den Schwierigkeiten zu entgehen. So z. B. sagt *Rothe*:

„Versteht man unter $\sqrt[m]{a}$ jede Zahl, die die Eigenschaft hat, dass sie zur *m*ten Potenz erhoben *a* gibt, und *nennt man jede Grösse, die entweder positiv oder negativ ist, eine mögliche*) Grösse;* so hat, wenn *m* eine gerade ganze positive Zahl, und *a* eine positive Zahl ist, $\sqrt[m]{a}$ allemal zween mögliche und zwar entgegengesetzte Werthe. Ist aber *m* eine gerade ganze positive Zahl, und *a* eine negative Zahl, so hat $\sqrt[m]{a}$ gar *keinen möglichen* Werth. Man nennt daher gerade Wurzeln aus negativen Zahlen *eingebildete* oder *unmögliche* Grössen.“ (Ähnlich *Caspari*, *Meyer und Choquet*, *Ohm*, *Öttinger*, *Tellkampf*.)

§. 21.

Kritische Untersuchung dieses Beweises.

Jeder Beweis dieses Satzes stellt sich, wenn seine Form kritisch erforscht wird, als einen disjunctiven Schluss dar, dessen disjunctiver Obersatz hier eigentlich also lautet:

Alle Grössen (und insbesondere alle Zahlen), *die es gibt*, die denkbar oder möglich sind, *können nur entweder positiv oder negativ sein.*

Oder: Jede denkbare Grösse oder Zahl ist nur entweder positiv oder negativ.

Bei der Prüfung eines disjunctiven Schlusses aber ist vor Allem sein disjunctiver Obersatz zu prüfen, ob in ihm die Aufzählung der Eintheilungsglieder des Eintheilungsganzen vollständig ist, also ob kein Eintheilungsglied mangelt (v. Lichtenfels Logik). Allein

*) Warum nicht eine *süsse*, *weisse*, *gute*, oder was man sonst will? Braucht man nichts mehr zu thun, als ihnen einen Beinamen zu geben, ohne die Angemessenheit desselben nachweisen zu müssen: so sind diese ja eben so gut, wie jener ausgesprochene. Will man aber damit eigentlich sagen dass es nur positive und negative Zahlen und keine anderen gebe; so ist es wissenschaftliche Pflicht, dieses gerade und verständlich auszusprechen.

wer hat bisher diese Vollzähligkeit der Eintheilungsglieder des Begriffes „Grösse" in seine zwei Glieder „positive und negative Grösse" geprüft?

So viel ich weiss, *ist dieses niemanden vor mir eingefallen.* Der Lehrer und Schriftsteller fand diesen Satz bisher dergestalt an und für sich einleuchtend und ausgemacht, dass er meistens des ausdrücklichen Aussprechens desselben sich überheben zu dürfen wähnte; der Schüler und Leser fand in dem Satze, wenn er ja einmal ihn sich ausführlich vordachte, gleichfalls einen so klaren und verständlichen **Grundsatz,** dass er ohne alles Bedenken über ihn hinwegschritt. Und dennoch ist, trotz solcher allgemeiner und ausnahmsloser Zuversicht, mit der man in der Algebra diesen Satz als Axiom gelten liess und lässt, die *Eintheilung aller Grössen in positive and negative unvollständig* und somit *dieser vermeintliche Grundsatz der Algebra falsch.*

§. 22.

Beweis dieser anscheinend dreisten Behauptung.

Um die Unrichtigkeit eines für *allgemein* giltig ausgegebenen Satzes zu beweisen, genügt es, in *einzelnen* Fällen seine Unstatthaftigkeit oder seine Ausnahme zu zeigen; um eine allgemein behauptete *Unmöglichkeit* zu widerlegen, reicht es schon hin, auch bloss für etliche besondere Beispiele die *Möglichkeit* darzulegen; und um die *Unvollständigkeit* einer allgemeinen Eintheilung nachzuweisen, braucht man nur zu zeigen, dass in manchen Fällen *mehr* Eintheilungsglieder vorhanden sind, als aufgezählt worden waren. Um also die bisher unerhörte und darum bestürzende Bekämpfung eines, seit mehr denn drei Jahrhunderten von den Algebraisten unerforscht dahin genommenen Irrthums siegreich durchzuführen, wird es genügen, seine Unhaltbarkeit zuvörderst bloss an einigen gemeinverständlichen schlagenden *Beispielen* vor Augen zu legen.

1. *Beispiel.* Ist die algebraisch zu betrachtende Grösse *Geld* eines gewissen Jemands, so nennen wir es nach Umständen im gewöhnlichen Leben theils Vermögen, theils Schuld, und in der algebraischen Rechnung theils positives theils negatives Geld dieses Jemands. Folgt nun daraus schon: „Alles Geld, das es gibt, das denkbar oder möglich ist, muss entweder positives oder negatives Geld, Vermögen oder Schuld dieses besondern Jemands sein?" oder: „Ein Geld, das angeblich weder positiv noch negativ ist, also weder zum Vermögen noch zur Schuld dieses Jemands gehört, ist undenkbar oder unmöglich?" Gibt es nicht auch noch Geld, das diesen Jemand gar nichts angeht? von dessen Existenz weder er noch irgend einer etwas weiss, z. B. vergrabenes? Und kann nicht selbst das Geld, das ihn angeht, doch immer noch ein solches sein, dass man es weder zu seinem Vermögen noch zu seiner Schuld rechnen kann? z. B. das Geld, von dem er schlafend oder wachend träumt, oder das er in einer Erbschaft zu gewinnen hofft, oder das er zu verlieren fürchtet, oder welches einem seiner nahen von ihm zu beerbenden Blutsverwandten zuwächst oder verloren geht; u. m. dgl.

2. *Beispiel.* Wenn jemand den süssen und saueren *Geschmack* der Dinge als positiv und negativ unterscheiden wollte, und er nun Anderen, die da behaupten, dass sie etwas, „Kren" und „Galle" genannt, gekostet und weder positiv noch negativ schmeckend befunden haben, also vorargumentiren wollte:

„Alles, was existirt, hat entweder einen positiven oder negativen Geschmack, d. h. schmeckt entweder süss oder sauer;"

„nun soll der Kren und die Galle, die man gekostet zu haben vorgibt, weder positiv noch negativ d. i. weder süss noch sauer schmecken;"

„folglich sind der Kren und die Galle unmögliche, nur fabelhafte oder eingebildete Dinge":

so würde ihm doch gewiss jedermann einwenden, dass nicht alles Existirende bloss entweder süss oder sauer, oder wie er's zu nennen beliebt, nur positiv oder negativ schmeckt, und dass der Kren *scharf* oder beissend, die Galle aber *bitter* schmecke, wenn auch jedes von beiden nach seiner Ansicht weder positiv noch negativ sehmeckt.

3. *Beispiel.* Allgemein erklärt man die auf einer Strasse nach entgegengesetzten Richtungen, hin und her, zurückgelegten Wege für positiv und negativ. Und doch wird es niemanden einfallen, die Existenz einer Stadt oder eines Dorfes durch eine Argumentation, wie die folgende, zu läugnen.

„Man redet mir da von einem Orte O im Lande L;

nun bin ich aber doch schon so oft auf der durch dieses Land ziehenden Heerstrasse von A nach B — oder auf allen Strassen dieses Landes — hin und her, positiv, und negativ, gefahren, ohne je einen Ort O getroffen zu haben;

mithin gibt es in diesem Lande nirgends einen Ort O, oder das, was man da von einem Orte O spricht, ist bloss Fabel oder Einbildung."

Denn ohne viel Nachdenken müsste ihm ja sogleich beifallen, dass dieser Ort wohl auch abseits von jeder Landstrasse liegen könne.

4. *Beispiel.* Dessgleichen, wenn ein ausgesandter Kundschafter berichten wollte:

„Auf meinem Streifzuge im Gebirge, hin und her, positiv und negativ, stiess ich nirgend auf einen Feind oder auf eine Räuberbande, die man gesehen zu haben vorgibt; also haben wir keinen Feind, keinen Räuber zu fürchten, und die eingelaufene Nachricht von der Existenz solcher ist völlig grundlos oder nur ersonnen:"

so dürfte wohl jeder nur etwas bedachtsame Zuhörer fragen: „Könnte dessenungeachtet der Feind oder die Raubhorde sich nicht noch ausserhalb des durchstreiften Gebietes, in einem seitwärtigen oder unterirdischen Verstecke verborgen halten?

§. 23.

Abschluss dieses Beweises.

Aus diesen Beispielen möchte sich nun wohl ohne Mühe klar einsehen lassen, dass und wienach die Eintheilung sämmtlicher Grössen in positive und negative unvollständig

und der gebrauchte disjunctive Obersatz: „Alle Grössen, die es gibt, sind nur entweder positiv oder negativ," also auch die auf ihn basirte Lehre von den imaginären Wurzeln irrig ist.

Zergliedern wir nämlich diesen Satz, so sagt er eigentlich: „Alle Grössen, die es gibt, können nur entweder in einer gewissen ursprünglich gedachten und darum positiv genannten Beziehung, oder aber in der ihr entgegengesetzten, und sonach negativ genannten Beziehung vorkommen;" oder noch klarer: „*Zu jeder Beziehung, in der man Grössen auffasst — der positiven — kann es nur noch eine* **entgegengesetzte** *— die negative — geben.*

Allein, so wie zu mancher uranfänglich gedachten positiven Beziehung (Eigenschaft, Bedingung) gar keine entgegengesetzte (negative) denkbar ist (§ 16, 2.); eben so gibt es dagegen wieder manche Beziehung, welcher nicht bloss eine entgegengesetzt ist, sondern der auch noch *mehre andere* entgegen- oder besser gesagt *nebenan, zur Seite stehen*, gestellt oder gehalten werden. Der gemeine Sprachgebrauch schon nennt die eigentlich und im strengsten Sinne der Grundbeziehung entgegengesetzte hervorhebend und verschärfend, die „ganz, gerade, geradezu (direkt), stracks, schnurstracks, diametral entgegengesetzte," die übrigen aber „ihr nur zum Theil, einiger oder gewisser Massen, in gewisser Rücksicht entgegengesetzte; von ihr — der Grundbeziehung — *abweichende*, oder mit ihr *sich kreuzende*" Beziehungen; ja er unterscheidet sogar Grade, Stufen, Schattirungen (Nuancen) oder Masse solcher Abweichungen mittels eigenthümlicher Benennungen.

Beispiele:

1. So kann einem gewissen *Plane, Vorhaben*, eines Menschen ein anderer geradezu entgegengesetzt sein, so dass dieser jenen völlig aufhebt oder vernichtet, und an die Stelle des Beabsichtigten das gerade Gegentheil setzt; allein mancher andere kann sich mit jenem ersteren auch nur durchkreuzen, bloss gewisser Massen von ihm abweichen oder verschieden sein.

2. Eine *Ansicht oder Meinung* eines Menschen kann der eines anderen schnurstracks entgegengesetzt sein; während die anderer Menschen von der seinigen nur mannigfaltig abweichen, oder diese Menschen mit ihm dissentiren.

3. So ist der *Freundschaft* die *Feindschaft*, der *Liebe* der *Hass*, dem *Wohlwollen* die *Verfolgung* entgegengesetzt; allein Abweichungen und Stufen der Zwischengefühle sind: das nicht Zusammensehen, die Lauheit, die Kälte, das abgemessene Betragen, das Gespanntsein, das Übers-Kreuz-Schauen, die Herbheit, u. a.

4. Dem *Süssen* steht das *Sauere* entgegen; allein das Bittere und Milde, das Scharfe und Linde, das Herbe, Beissende, Zusammenziehende, Prickelnde u. m. dgl. kann als ihm zur Seite stehend betrachtet werden.

5. Dem *Bejahen* ist das *Verneinen*, dem *Bewilligen* das *Abschlagen* ganz entgegen; allein beiden steht zur Seite oder zum Theil entgegen: das listige, feine, gewandt oder politisch ausweichende Antworten (eludere, franz. éluder la question), die Ausflucht, der Winkelzug, u. dgl.

6. Das offene *für* etwas sich Entscheiden, oder das Einwilligen, Einstimmen hat nicht bloss dass ausdrückliche *dawider* sich Erklären, das dawider Stimmen gegen sich, sondern auch das schlaue Zu- oder Abwarten, das Aufschieben seiner Entscheidung auf eine günstigere Gelegenheit u. dgl., neben sich oder zur Seite.

7. Ganz vorzüglich gehören hieher die mannigfachen *räumlichen Beziehungen* des Ortes, der Lage und Richtung.

a. So gibt es allbekanntlich zu einem *Längs, Entlang*, das man in das *Vorn* und in das ihm entgegengesetzte *Hinten* unterscheidet, noch sehr mannigfaltige davon abweichende *Seitlings, Seitwärts* (Lateral), Abseiten, Zur- oder Auf-der-Seite, und hierunter wieder das mancherlei *Schräg, Schief* mit dem bestimmten, von zwei entgegengesetzten Richtungen gleichviel ablenkenden, *Quer Zwerch*; die in so vielerlei Neben-, Vor-, Bei-, Zeit- und Hauptwörter, welche Lagen, Stellungen oder Bewegungen bezeichnen oder näher beschreiben, eingewebt sind.

b. So unterscheiden wir bei der Lage und Bewegung der Dinge ausser uns nicht bloss ein *vor* und *hinter* uns, sondern auch ein *rechts* und *links* von uns, ein *über* und *unter* uns, nebst noch mannigfachen Zwischenlagen und Zwischenstellungen, wie vorn rechts, hinten links, u. ähnl. Ein Mensch, der vor sich hin schaut, kann sich nicht bloss ganz *umkehren* — Rechts- oder Linksumkehrt machen — sondern auch nach der einen oder anderen Seite hin, rechts oder links, in verschiedenem Masse sich *wenden* oder *drehen*, insbesondere eine *halbe Umkehrung*, eine Rechts- oder Links-Wendung — ein Halbrechts oder Halblinks machen.

c. Der Wind kann einen Menschen nicht nur von vorn, ins Angesicht, und entgegengesetzt von hinten her, im Rücken anwehen, sondern auch mannigfaltig von der einen oder anderen, der rechten oder linken Seite und da wieder zum Theil von vorn, zum Theil von hinten her. Dessgleichen trifft er Bäume, Häuser, Ortschaften u. dgl. an verschiedenen Seiten derselben.

d. Dem *Beschauer einer Landschaft* liegen Ortschaften, Gebäude, Wälder u. A. nicht bloss vorn, vor seinen Augen, und hinter ihm, im Rücken, sondern auch rechts und links, und rings herum nach vielerlei Gegenden hin. Der *Beobachter des unbewölkten Himmels* sieht nicht nur, wenn er ungezwungen geradaus vor sich hin schaut, Sterne, sondern auch wenn er sich umkehrt, hinter sich, dann noch, wenn er sich angemessen wendet, zur Rechten und Linken, so wie über sich, und in den unendlich vielen Zwischenrichtungen.

e. In eine durch ein Land hinziehende *Heerstrasse* lenken nach mannigfaltigen Richtungen *Seitenstrassen* ein, oder diese von jener ab. Äusserst vielfältig sind die gegenseitigen *Ablenkungen der Richtungen*, unter denen Bäche in Flüsse, Flüsse in Ströme, Ströme in Seen oder Meere *einfliessen*.

f. In der Erdkunde, Schifffahrt u. dgl. unterschieden wir hauptsächlich vier sogenannte *Welt- oder Himmelsgegenden*, von denen Süd und Nord einander entgegen liegen, und ihnen quer zur Seite Ost und West, auch wieder einander gegenüber sich befinden; überdiess noch vielerlei Zwizchengegenden, wie Süd-Ost, Süd-Süd-Ost, Ost-Süd-Ost u. s. w.

g. Verbildlicht sehen wir die *vielerlei Richtungen* aus einerlei Standpunkte an den Speichen eines Wagenrades oder an den Armen eines Wasserrades, an den von der Mitte auswärts schauenden Zähnen der Uhr-, Mühl- und sonstigen Maschinenräder. *Alle möglichen* solchen *Richtungen* in steter unmittelbarer Aufeinanderfolge vergegenwärtigen und veranschaulichen uns die mancherlei Umdrehungen oder Umläufe von vielerhand Gegenständen, als: die ununterbrochenen Umläufe der Uhr- und anderer Zeiger, der verschiedentlichen Räder und ihrer Speichen, Flügel oder Zähne; der scheinbare Umschwung des gestirnten Himmels u. dgl., absonderlich, wenn wir eine bestimmte Richtung einer gewissen sich mit umdrehenden starren geraden Linie, als eines Zeigers, eines Radzahnes oder einer Radspeiche, stets im Auge behalten.

Durch alle diese (fast sämmtlich, mit Umgehung der wissenschaftlichen Geometrie, deren Kenntniss hier zunächst, wo uns die Algebra beschäftigen soll, nicht vorausgesetzt wird, aus dem gewöhnlichen Leben genommenen) Beispiele haben wir klar gemacht und ausser Zweifel gestellt, dass und wienach es bei manchen Dingen vielerlei Systeme zusammengehöriger Beziehungen derselben gebe, von denen einige einander geradezu oder ganz, andere aber bloss zum Theil, einiger Massen, entgegengesetzt sind oder einander widerstreiten, daher mannigfaltig von einander abweichen.

§. 24.

Benennungen derartiger Beziehungen.

Zur klaren Unterscheidung solcher unter sich verbundener Beziehungen benützen wir folgende, theils von den verschiedentlichen üblichen Redeweisen, theils von den mancherlei im Raum denkbaren Richtungen hergenommenen, bildlichen Benennungen derselben:

1. Die der Anlage einer mathematischen Forschung offen oder versteckt zu Grund gelegte Beziehung nennen wir, wie bereits in §. 11 angeführt und auch sonst üblich, die *Grund-* oder *Fundamentalbeziehnng*, die *positive* (vorausgesetzte oder unterstellte), die *affirmative, bejahende*, Beziehung. Z. B. Vorwärts, Süd.

2. Die ihr entgegengesetzte, oder kräftiger bezeichnet die ihr geradezu, oder stracks entgegengesetzte nennen wir in der schon früher (§. 11) angeführten Weise die *negative* (verneinende) Beziehung. Z. B. zum Vorwärts das Rückwärts; zu Süden der Norden.

3. Solche zwei einander entgegengesetzte oder widerstreitende Beziehungen, die wir bereits (im 1. Hptst.) hinreichend erforscht haben, nennen wir, in Rücksicht auf andere ausser ihnen noch bestehende Beziehungen derselben Art, insofern sie sich bestimmt, ohne Rückhalt, bejahend oder verneinend aussprechen, *declarative* (offen sich aussprechende), *decisive* (entscheidende, entschiedene), oder auch bildlich *directe, directive* (gerades Weges führende); diese anderen dagegen überhaupt *digressive* (ausweichende, gleichsam rückhältig antwortende), oder *abweichende* (declinative), *ablenkende* (deversive), abbeugende (deflexive) Beziehungen. Auch solche abweichende Beziehungen können paarweise einander entge-

gesetzt sein. Z. B. Rechts-vorwärts und Links-rückwärts, Süd-Süd-West und Nord-Nord-Ost.

4. Von den ausweichenden Beziehungen thun sich besonders ein Paar einander entgegengesetzte hervor, die von jeder der beiden decisiven, von der positiven und negativen, gleichviel abweichen; wir werden sie *elusive* (verdrehende) (vergl. §. 23, 5.), oder *transversive* (transverse, quere, zwerche) nennen. Z. B. Bei Vor- und Rückwärts das Rechts und Links, mit Süd und Nord der West und Ost.

5. Ein Paar entgegengesetzte directe und ein Paar ihnen zugehörige transversive Bezehungen machen zusammen zwei Paar *sich kreuzender* oder *gekreuzter* Beziehungen aus. Z. B. das Vorwärts und Rückwärts mit dem Rechts und Links, der Süd und Nord mit den West und Ost.

6. Für umfassende Allgemeinheit der Begriffe muss man jedoch das Abweichen oder Ablenken, d. h. das Verschiedensein jeder Beziehung von der festgestellten Grundbeziehung als den *höheren Begriff*, als Gattung, folglich das Entgegengesetztsein, den Gegensatz oder die Negativität, so wie auch die Kreuzung, als *niedere, untergeordnete Begriffe*, als *Arten* ansehen; so dass überhaupt jede Beziehung — sogar die entgegengesetzte — von der Grundbeziehung ablenkt, abweicht, d. h. unterschieden ist.

§. 25.

Das Abweichen der Aggregationsbeziehungen von Grössen insbesondere betrachtet.

Nachdem wir nun durch verschiedentliche Beispiele die Möglichkeit und den bestimmten Begriff von noch anderen als entgegengesetzten Beziehungen nachgewiesen; oder nachdem wir dargethan haben, dass und in wiefern zwischen den Beziehungen mancher Dinge nicht bloss *Gegensatz*, sondern auch *Abweichung* oder Ablenkung überhaupt bestehen könne; und nachdem wir uns das Bereden dieser neuen Eigenschaft durch Einführung passlicher Benennungen erleichtert haben: kehren wir zu unserer Grundanforderung an solche Beziehungen zurück, bei denen die in ihnen vorkommenden Dinge *Grössen* sind, welche in Rechnung oder mathematische Untersuchung genommen werden sollen.

Nach dieser Grundforderung (§. 9) sollen die beiden declarativen oder directen Beziehungen von Grössen so beschaffen sein, dass diese Grössen, so oft oder so lange die eine Beziehung besteht, zu *addiren*, dagegen so oft oder so bald die andere Statt findet, *abzuziehen* seien, oder dass die Grössen, die in ganz entgegengesetzten Beziehungen auftreten, entgegengesetzt zu aggregiren seien. Demnach müssen Grössen, deren Beziehungen einander nicht ganz, sondern nur zum Theil entgegengesetzt sind, also bloss von einander abweichen, auch nicht ganz, sondern nur zum Theil entgegengesetzt, folglich *abweichend aggregirt* werden; so dass ihre Aggregation nicht entgegengesetzt sondern abweichend vollzogen, nur *in einer gewissen* — noch näher zu bestimmenden — *Weise abgeändert (modificirt)* wird.

Man kann sich nämlich überhaupt vorstellen, das gewisse auf die Bestimmung und Zusammensetzung einer Grösse vereint, jedoch theils günstig, theils nachtheilig einwirkende, also in verallgemeinertem Sinne aggregative Grössen, je nachdem sie in einerlei oder verschiedener Weise mitwirken, in einerlei oder verschiedene Abtheilungen gebracht, unter denselben oder verschiedenen Überschriften (Rubriken) einregistrirt werden, so zwar, dass jede Abtheilung in zwei Unterabtheilungen, jede Rubrik in zwei Spalten zerfällt, von denen eine die in einem gewissen, die andere die im gerade oder stracks entgegengesetzten Sinne einwirkenden oder beitragenden Grössen in sich aufnimmt; und dass das Gesammtaggregat berechnet wird, indem man durchgängig die in einerlei Spalte befindlichen Grössen — Posten — zusammen addirt und jedes Paar solcher unter derselben Rubrik vorkommenden Partial- oder besser Particularsummen gegen einander abgleicht, nämlich so, dass, wenn sie gleich sind, sie sich ganz aufheben, mit einander wegfallen, dagegen wenn sie ungleich sind, die kleinere in der grösseren getilgt wird, und nur der Überschuss der grösseren in ihrer Spalte zurückbleibt; wonach also das Totalaggregat so vielerlei Glieder oder Posten enthalten wird, als wie viel verschiedene Rubriken besetzt und nicht aufgehoben worden waren.

Beispiele:

1. Bei ausstehenden oder anzulegenden Capitalien kann die *Sicherheit* ihrer Unterbringung oder Anlegung, in Rücksicht auf das Eingehen der Zinsen, der Theil- oder Gesammtzahlungen; bei zu zahlenden Conti's, Geldforderungen, oder bei Schulden kann die *Rechtmässigkeit*, mit der ihre Zahlung einerseits gefordert, andrerseits bestritten wird, höchst mannigfaltig sein, und zur Übersicht des Standes der Gesammtgebahrung, nach dem Masse oder der Abstufung jener Sicherheit oder dieser Rechtmässigkeit, eine Sonderung und Registrirung der Gelder Statt finden.

2. Bei der Übernahme einer Erbschaft oder eines Ankaufes können die einzelnen Gegenstände, als: Baargeld, Juwelen, Gebäude, Ländereien, Grundstücke, u. s. f., in Bezug auf das *Recht* oder den *Rechtstitel*, mit dem der Erbe oder Käufer sie anspricht, oder im Gegentheil Andere sie von ihm fordern, rücksichtlich des Standes — der Wahrscheinlichkeit des Gewinnes oder Verlustes — der hierwegen angeregten Processe u. dgl., von einander unterschieden, und zur Übersicht des Gesammt-Erbes oder -Kaufes die Eintheilung und Tabellirung der Parzellen vorgenommen werden.

3. In einer Lebens-, Feuer-, Hagel- oder sonstigen Schaden-Versicherungsanstalt, in einem Witwen- oder Waisen-Pensionsinstitute kann die verschiedene *Wahrscheinlichkeit* des früheren oder späteren Eintritts einer zu leistenden Zahlung oder eines Heimfalls eine solche Unterscheidung und Rubricirung der Versicherungsposten begründen.

4. Bei Katastral-Steuerbemessungen begründet die Verschiedenheit der *Lage*, der *Bodengüte*, und überhaupt der *Ertragsfähigkeit* der Grundstücke ihre Abtheilung und Eintragung in Classen oder Sorten.

5. Ein Schiff auf offener See, ein Wanderer in einer freien Ebene, kann nach verschiedenen, zum Theil einander entgegengesetzten *Weltgegenden* oder *Richtungen* sich bewe-

gen; bei der Bemessung und zeichnenden Darstellung seines ganzen Weges müssen also die einzelnen Wegstrecken, gemäss der Verschiedenheit ihrer Richtungen, gesondert und in Rubriken zusammengestellt werden.

§. 26.

Deutlichst ausgesprochenes Abweichen von Grössenbeziehungen.

Um die Vorstellungen von dem Abweichen der aggregatorischen Grössenbeziehungen ganz klar und die folgende Lehre von ihnen vollkommen verständlich zu machen, müssen wir das treffendste Bild solcher Beziehungen vor Augen legen, damit wir an demselben andere seltener in Anregung kommende derartige Beziehungen verstehen und verdeutlichen können.

Am treffendsten und deutlichsten spricht sich das Abweichen der Beziehungen von einander aus, oder man erhält das treueste Bild abweichender Beziehungen an den Richtungen mehrerer auf einem Blatt Papier, glatten Brete oder Tische, auf einer Glastafel *), aus einem und demselben Punkte gezogenen geraden Striche oder Strahlen; oder an den Richtungen der Speichen (Arme), oder Zähne eines ebenen (platten) Rades; oder an den nach einander folgenden Stellungen oder Richtungen eines Zeigers, der über einem fest liegenden Uhrblatte sich herumdreht, eines Striches auf einer liegenden Scheibe, die sich um eine stehende Welle dreht, einer Speiche eines umlaufenden Wagen- oder Mühlrades, eines Menschen, der aufrecht stehend sich herumwendet oder schwenkt, u. m. dgl. (Vergl. §. 23, 7. *g.*)

Ein solches Bild möge uns jedesmal vorschweben, so oft wir das Abweichen von Beziehungen anderer Art uns deutlich machen, oder abweichende Beziehungen überhaupt erforschen wollen.

So wie nun die nach einander folgend betrachteten Speichen eines Rades oder Stellungen eines sich umdrehenden Zeigers von einer gewissen hervorgehobenen verschiedentlich abweichen, und die späteren, der Ordnung nach, den früheren geradezu entgegengesetzt sind, bis sie endlich genau wieder auf die vorher besehenen zurückkehren, und sonach eine fortwährend *wiederkehrende Periode* ausmachen: eben so hat man sich überhaupt die der Grundbeziehung + nachfolgenden Beziehungen 𝔄, 𝔅, ℭ, ... 𝔛, 𝔜, ℨ derselben Art der Reihe nach abweichend und dann in die entgegengesetzten —, — 𝔄, — 𝔅, — ℭ, ... — 𝔛, — 𝔜, — ℨ, übergehend, danach aber wieder auf die früheren und ursprünglichen +, 𝔄, 𝔅, ℭ, ... u. s. f. zurükkommend, also *stets in der Periode*

+, 𝔄, 𝔅, ℭ, ... 𝔛, 𝔜, ℨ, —, — 𝔄, — 𝔅, — ℭ, ... — 𝔛, — 𝔜, — ℨ, +

wiederkehrend sich vorzustellen.

Andere als die angeführten — von der Rundschau, dem Umlaufe, der Umdrehung hergenommenen — *Beispiele abweichender Beziehungen* sind jeden Falls minder leicht verständ-

*) geometrisch ausgedrücket: in einer Ebene.

lich, theils weil sie zu abstract, theils weil sie zu selten anwendbar oder noch zu wenig erforscht worden sind. Wir erwähnen hier nur folgende:

1. Ein Rechtsstreit um ein Besitzthum kann durch mehrere richterliche Instanzen laufen, und man kann den jeweiligen Stand desselben nach Verkündung des von einem Gerichte gefällten Urtheils als die zu erwägende Beziehung ansehen. Nun können anfangs alle solche Stände vom Gewinne des Processes mehr und mehr zum Verluste sich hinneigen und endlich sogar in diesen ganz übergehen; aber durch eine frische anderseitige Aufgreifung des Processes wieder dem Gewinne nach und nach sich zuwenden und allmälich nähern, ja sogar endlich wieder auf ihn ganz zurückkehren.

2. Bei einer Wette, einem Spiele um Geld, bei Lebensversicherungen u. ähnl. können die Aussichten, Wahrscheinlichkeiten oder Hoffnungen auf Gewinn und Verlust als derlei veränderliche periodisch wiederkehrende Beziehungen angesehen werden.

§. 27.

Bemerkung wegen des eingeschränkten Vorkommens ablenkender Beziehungen.

Es gibt freilich nicht zu jeder Beziehung, ja sogar nur zu sehr wenigen in den gewöhnlichen Rechnungen zur Betrachtung kommenden Beziehungen von Grössen, ausser der entgegengesetzten auch noch andere davon abweichende. Allein es lässt sich ja auch zu gar vielen Beziehungen nicht einmal eine entgegengesetzte auffinden, und nichts desto weniger hält die Algebra in ihren allgemeinen Erforschungen der Grössen die Möglichkeit und die Existenz entgegengesetzter Beziehungen überhaupt aufrecht. Wenn demnach auch bloss diese wenigen bisher angeführten Arten von Beziehungen, oder wohl gar nur die als mustergiltig aufgestellten räumlichen für die einzig und allein denkbaren erachtet werden sollten, bei denen, ausser dem wechselseitigen Gegensatze auch noch eine Abweichung, Ablenkung oder Kreuzung Statt findet; so müsste doch immerhin die Möglichkeit und das Bestehen abweichender Beziehungen für die allgemeinen Forschungen der Mathematik unbedingt zugestanden und zu Grunde gelegt werden.

Zudem gestattet die, sicher nie abzuläugnende und zu umgehende Art der räumlichen Beziehungen, da sie in der so ausgedehnten Wissenschaft der Geometrie und in der mit ihr aufs engste verbundenen Mechanik äusserst vielfältig auftritt, allein schon Stoff genug zu solch reichlicher specieller Anwendung der allgemeinen Lehre vom Abweichen der Beziehungen, dass die Aufnahme dieser Lehre auch durch ihren *Nutzen* gerechtfertigt erscheint.

Endlich möchte wohl aus den bisher angeführten, dem gewöhnlichen Leben entnommenen, Beispielen einleuchten, dass die Mathematiker lediglich desswegen, weil sie noch nie dazu veranlasst waren, keineswegs schon alle möglichen Beziehungen und Umstände der im bürgerlichen Leben und in den mancherlei Wissenschaften vorkommenden Grössen so vollkommen durchforscht haben, dass sich nicht noch, wenigstens auf dem Wege einer logisch geregelten und darum zulässigen Speculation, dergleichen abweichende

Beziehungen aufdecken und der Algebra zueignen lassen sollten; wenn sie gleichwohl für die Praxis durchaus ungeeignet wären.

§. 28.

Nähere Erforschung des Abweichens der Grössenbeziehungen.

Das Abweichen oder Ablenken, das Unterschiedensein (Differiren) der Beziehungen einerlei Art von einander bietet folgende, die Bestimmung und Erforschung seiner Grösse begründende, Eigenschaften dar:

1. So wie von einer Beziehung 𝔄 eine andere 𝔅 in einem gewissen Sinne abweicht, eben so weicht oft im selben Sinne auch noch von 𝔅 eine dritte Beziehung ℭ ab. Dann sagt man: „Die Abweichung der Beziehung ℭ von der 𝔄 begreife (fasse, vereine) in sich die beiden vorigen Abweichungen, der 𝔅 von 𝔄, und der ℭ von 𝔅; die Abweichung der ℭ von 𝔄 sei der Inbegriff, die Zusammensetzung oder die *Summe der Abweichungen* der 𝔅 von 𝔄, und der ℭ von 𝔅." Bei dieser Ansicht *kommt* daher *den Abweichungen der Beziehungen von einander Grösse zu*, oder diese *Abweichungen sind Grössen* einer eigenthümlichen Art.

Z. B. Wenn bei einem mit Speichen versehenen Rade von drei auf einander folgenden Speichen ihre Richtungen 𝔄, 𝔅, ℭ aufgefasst werden; so weicht in demselben Sinne, (z. E. nach rechts) wie von der Richtung 𝔄 die 𝔅 abweicht, auch von 𝔅 die ℭ ab, und dann ist die Abweichung der ℭ von 𝔄 aus jenen zweien, der 𝔅 von 𝔄, und der ℭ von 𝔅 zusammengesetzt. -- Dasselbe gilt auch von den Richtungen der Zähne an Rädern, der Welt- oder Himmelsgegenden, der auf dem Papiere aus einerlei Punkt gezogenen geraden Striche, u. m. dgl. — Erfasst man bei einem sich stets in demselben Sinne, z. B. rechts herum, sich drehenden Gegenstande, als einem Menschen, einem Wagen- oder Mühlrade, einem Zeiger auf einem Uhrblatte, u. dgl. drei Stellungen 𝔄, 𝔅, ℭ, die er nach und nach einnimmt; so sieht man die Abweichung, Drehung, oder den Übergang aus der Stellung 𝔄 in die ℭ als Verein der Abweichungen oder Drehungen aus der 𝔄 in 𝔅, und aus der 𝔅 in die ℭ an.

2. Paare von Beziehungen derselben Art können ganz in der nämlichen Weise von einander abweichen; oder *Abweichungen*, Ablenkungen je zweier Beziehungen von einander können *gleich* sein. So wie nämlich von einer Beziehung 𝔄 eine andere 𝔅 abweicht, eben so kann von einer Beziehung ℭ eine andere 𝔇 abweichen, folglich der Abweichung der 𝔅 von der 𝔄 gleich sein die Abweichung der 𝔇 von der ℭ.

Beispiele sind: Gleiche Abweichungen der Richtungen der Speichen oder Zähne von Rädern, der Stellungen sich umdrehender Gegenstände, der Processstände, der Stände einer Wette, u. dgl. wie früher.

3. Zufolge dieser beiden Eigenschaften *können Abweichungen* oder Ablenkungen *der Beziehungen* von derselben Art *der Rechnung unterworfen werden*. Man kann sie

a) mit einander vereinen, zu einander hinzufügen — *addiren*, also auch

b) zwei vereinte wieder trennen, — *subtrahiren*, und

c) sie paarweise *vergleichen*, die eine grösser oder kleiner als die andere finden.

d) Daher lässt sich eine solche Ablenkung vervielfachen — *multipliciren* — wenn man sich eine ganze Reihe von Beziehungen denkt, deren jede folgende von der vorhergehenden in völlig gleicher Weise abweicht; wie die Richtungen der ringsherum gleich vertheilten Speichen oder Zähne eines Rades, die Stellungen eines stets gleichförmig (in gleichen Zeiten) umlaufenden Uhrzeigers, u. dgl.

4. Ist in einer solchen Kette nach einander folgender gleichartiger und gleichmässig von einander ablenkender Beziehungen die *Ausgangsbeziehung* die Grund- oder positive Beziehung, $+$, ihrer Art; und legt man ihr, um die folgenden mit den Nummern 1, 2, 3, 4..... betheilen zu können, die Nummer 0 (Null) auf; so kann man jede in dieser Kette vorkommende Beziehung die *so vielfach aufgestufte erste ablenkende Beziehung* nennen, als welche Nummer sie trägt, oder als die wie vielte sie bei solcher Zählung ist: nämlich wenn λ die erste ablenkende Beziehung heisst, die 2te die zweifach, die 3te die dreifach, die 4te die vierfach aufgestufte Beziehung λ, u. s. f.

Danach ist die Ablenkung der nfach aufgestuften Beziehuug λ von der Grundsbeziehung $+$ das nfache der Ablenkung dieser Beziehung λ selbst von der Grundbeziehung $+$.

5. Diesem gemäss muss auch im Allgemeinen eine Abweichung zweier gleichartiger Beziehungen als ein angewiesenes Vielfaches einer anderen dargestellt oder in angewiesen viel gleiche Abweichungen abgetheilt — *dividirt* — werden können. Dann lässt sich auch jede Beziehung μ, in Absicht auf eine bestimmte Grundbeziehung, als eine beliebigvielfach, z. B. $n$fach aufgestufte andere Beziehung λ darstellen, oder beliebig vielfach, 2fach, 3fach, 4fach.... $n$fach *abstufen*; so dass λ die $n$fach abgestufte Beziehung μ ist.

6. Sofort können auch die *Verhältnisse* von Abweichungen gleichartiger Beziehungen bestimmt, daher solche Abweichungen auch durch einander *ausgemessen* und die Grössen (das Wiegross) solcher Abweichungen *durch Zahlen* dargestellt werden.

7. Als natürliche *Einheit* zur Messung von derlei Abweichungen dient die durch die Natur der Sache selbst festgestellte Abweichung jeder Beziehung von ihrer entgegengesetzten, nämlich der negativen Beziehung von der positiven; welche Abweichung oder Ablenkung gewöhnlich der *Gegensatz* oder die *Negativität* der Beziehungen genannt wird, füglich aber auch die *Umlenkung* heissen kann.

Ihr — dem einfachen Gegensatze — entspricht in unserem Bilde von dem umlaufenden Uhrzeiger, oder der Speiche des sich umdrehenden Rades um eine feste Axe die Umkehrung, Umwendung, der halbe Umlauf, die halbe Umdrehung; bei einem sich herumschwenkenden Menschen sein Rechts- oder Linksum.

8. Danach führt der *doppelte Gegensatz*, der Gegensatz des Gegensatzes, die doppelte Negation oder die zweimalige Umlenkung einer Beziehung auf die Rückkehr zur ursprünglichen positiven Beziehung, auf die *Ringsumlenkung* der Beziehung, und erinnert an die bekannte Regel der Logiker: *Duplex negatio affirmat.*

Ihr entspricht in unseren Bildern der ganze Umlauf oder Umschwung, die volle Umdrehung.

Der halbe Gegensatz gleicht der zuerst eintretenden (positiven), *der anderthalbe* der nachmals eintretenden (negativen) *Kreuzung*.

In unseren Bildern entspricht der positiven Kreuzung die halbe Umkehrung oder Umwendung, oder die Viertelsumdrehung, der Viertelumlauf; der negativen Kreuzung aber Dreiviertel-Umdrehung oder -Umlauf.

9. Allgemein nennen wir *Beziehungen* verschiedener Arten *gleichablenkig* oder *gleichwerthig*, wenn ihre Ablenkung von der Grundbeziehung ihrer Art gleichgross, d. h. ein Gleichvielfaches eines gleichvielten Theiles des Gegensatzes ihrer Art (d. i. der Ablenkung ihrer negativen Beziehung von der positiven) ist; z. B. wenn man in gleicher Weise, wie sie von ihren Grundbeziehungen abweichen, gleichoft nach einander abweichen muss, um auf die negative Beziehung ihrer Art zu gelangen.

Nachdem wir nun mit einer Umständlichkeit, die in der Neuheit und Wichtigkeit des Gegenstandes genügende Entschuldigung finden dürfte, die Abweichung der Grössenbeziehungen erklärt und erforscht haben, *wenden wir diese Lehre auf die*, uns als näheres Ziel vorschwebende, *Bestimmung der abweichenden Beziehungen von Producten, Potenzen und Wurzeln an.*

§. 29.

Beziehungen der Producte abweichend beziehlicher Factoren.

In einem Producte zweier Factoren erscheine die zu multiplicirende, also entweder ganz oder zum Theil mehrfach zu wiederholende Grösse — der Multiplicand — in einer gewissen Beziehung, die wir, um die Begriffe leichter festzuhalten, φ nennen wollen, und welche von der Grundbeziehung $+$ ihrer Art im Allgemeinen beliebig abweichen soll. Ingleichen komme auch die das Multipliciren leitende Zahl — der Multiplicator — in einer überhaupt abweichenden Beziehung ψ vor.

So wie man nun von der positiven Beziehung $+$ auf die Beziehung ψ des Multiplicators übergehen muss; eben so hat man von der Beziehung φ des Multiplicands noch weiter vorzuschreiten, um zu der dem Producte beizulegenden Beziehung zu gelangen, die wir kurzweg mit $\varphi\psi$ oder $\varphi\,.\,\psi$ bezeichnen wollen. *Die Beziehung des Productes* lenkt oder weicht demnach von der des Multiplicands eben so ab, wie die des Multiplicators von der Grundbeziehung.

Um diesen Vorgang *bildlich darzustellen*, denken wir uns einen um eine feste Axe umlaufenden Gegenstand (z. B. einen Uhrzeiger, eine Radspeiche) aus seiner ursprünglichen Stellung oder Richtung $+$ in eine andere so (z. E. rechtshin) sich drehen oder ablenken, wie man aus der positiven Beziehung auf die Beziehung φ des Multiplicands übergehen muss; und dann noch aus dieser analog mit φ zu bezeichnenden Stellung weiter sich so (rechtshin) drehen oder ablenken, wie man aus der Grundbe-

ziehung auf die Beziehung ψ des Multiplicators übergehen muss; so deutet diese letztere Stellung des umlaufenden Gegenstandes die Beziehung des Productes an und mag analog mit $\varphi\psi$ bezeichnet werden. Markirt man etwa diese, von dem sich umdrehenden Gegenstande nach einander eingenommenen drei Stellungen oder Richtungen $+$, φ, $\varphi\psi$, durch drei aus der Umdrehungsaxe auslaufende gerade Striche (Strahlen) oder Speichen; so fixiren und verkörperlichen diese gewisser Massen die Grundbeziehung $+$, die Beziehung φ des Multiplicands und die Beziehung $\varphi\psi$ des Productes.

Sind insonderheit die Beziehungen φ und ψ des Multiplicands und Multiplicators gleichwerthig (§. 28, 9.), so wird des Productes Beziehung $\varphi\varphi$; sie weicht daher von der Beziehung φ des Multiplicands eben so ab, wie diese von der Grundbeziehung $+$, und ist demnach die zweifach aufgestufte Beziehung φ jedes der beiden Factoren.

Auf gleiche Weise muss, wenn ein in der Beziehung φ stehender Multiplicand mit mehreren in der gleichwerthigen Beziehung φ vorkommenden Multiplicatoren nach einander zu multipliciren ist, die Beziehung des Productes, welche für 3, 4, 5, ... Factoren durch $\varphi\varphi\varphi$, $\varphi\varphi\varphi\varphi$, ... bezeichnet werden soll, die drei-, vier-, fünf- u. m.-fach aufgestufte Beziehung φ jedes Factors sein.

So wie sich also der gedachte umlaufende Gegenstand aus seiner ursprünglichen, die Grundbeziehung $+$ signalisirenden nullten Stellung in die erste nachfolgende, die Beziehung φ des Multiplicands andeutende Stellung zu drehen hat; ebenso muss er sich wiederholt weiter drehen, damit die zweite Stellung desselben die Beziehung $\varphi\varphi$ des Productes zweier, die dritte Stellung die Beziehung $\varphi\varphi\varphi$ des Productes dreier gleichwerthig beziehlicher Factoren u. s. f. andeuten könne.

§. 30.

Beziehungen der Potenzen abweichend beziehlicher Zahlen.

Da jede eigentliche, d. h. nach einem absoluten ganzen die 1 übersteigenden Exponenten auszuführende, also mindestens zweitgradige Potenz das Product so vieler mit dem Potentiand identischer Factoren ist, als vom wie vielten Grade oder Range diese Potenz ist; so muss, gemäss dem zuletzt Gefundenen, wenn φ die Beziehung des Potentiands oder des sich wiederholenden Factors ist, die Beziehung jeder Potenz die so vielfach aufgestufte Beziehung φ des Potentiands sein, als die wie vielte oder die wie vieltgradige diese Potenz ist.

Bezeichnen wir nun, wenn die Potenz die 2te, 3te, 4te, ... n^{te} ist, ihre abweichende Beziehung mit φ^2, φ^3, φ^4, ... φ^n; so kann durch diese Zeichen auch die 2-, 3-, 4-, ... $n$fach aufgestufte Beziehung φ und vermöge des Früheren (§. 29) auch die Beziehung eines Productes von 2, 3, 4, ... n Factoren angedeutet werden, welche durchweg in der Beziehung φ stehen.

Die Ablenkung der Beziehung der n^{ten} Potenz eines in einer Beziehung φ vorkommenden Potentiands von der Grundbeziehung beträgt also das nfache der Ablenkung dieser Beziehnng φ des Potentiands von derselben Grundbeziehung.

So wie demnach in unserem bekannten Bilde der umlaufende Gegenstand sich zu drehen hat, um die Ablenkung der Beziehung φ des Potentiands von der Grundbeziehung zu versinnlichen; eben so muss er sich von seiner, die Grundbeziehung markirenden, Ur- oder nullten Stellung aus *n*mal nach einander drehen, damit seine n^{te} Stellung die Beziehung φ^n der n^{ten} Potenz markire, oder damit seine Gesammtdrehung die Ablenkung der Beziehung der n^{ten} Potenz von der Grundbeziehung versinnliche.

§. 31.

Beziehungen der Wurzeln aus überhaupt abweichend beziehlichen Zahlen.

Soll nun umgekehrt die Beziehung einer Wurzel n^{te} Grades aus einer in der Beziehung ϱ betrachteten Zahl — dem *Radicand* — bestimmt werden, und deutet man die zu suchende Beziehung durch $\sqrt[n]{\varrho}$ oder $\varrho^{\frac{1}{n}}$ an; so fordert man, dem Begriffe einer n^{ten} Wurzel gemäss, die Wurzel solle in einer solchen Beziehung φ gedacht werden, dass, wenn man die also bezogene Wurzel — als Potentiand genommen — zur n^{ten} Potenz erhebt, die Beziehung dieser Potenz, d. i. die *n*fach aufgestufte Beziehung φ, mit der vorgelegten Beziehung ϱ des Radicands einerlei sei. Setzt man nämlich $\sqrt[n]{\varrho} = \varphi$, so soll $\varphi^n = \varrho$ sein.

Die zu bestimmende Beziehung φ oder $\sqrt[n]{\varrho}$ der *n* ten Wurzel soll demnach *n* fach *auf*gestuft die angegebene Beziehung ϱ des Radicands wieder herstellen; folglich ist sie, vermöge §. 28, 5., die *n*fach *ab*gestufte Beziehung ϱ des Radicands. Oder die Ablenkung der Beziehung der n^{ten} Wurzel aus einer in der Beziehung ϱ auftretenden Zahl von der Grundbeziehung muss der n^{te} Theil der Ablenkung dieser Beziehung ϱ des Radicands sein. Demgemäss kann man auch die *n* fach abgestufte Beziehung ϱ durch $\sqrt[n]{\varrho}$ oder $\varrho^{\frac{1}{n}}$ andeuten.

Um demnach aus der Beziehung ϱ eines Radicands einer n^{ten} Wurzel die Beziehung φ oder $\sqrt[n]{\varrho}$ dieser Wurzel zu ermitteln; hat man sich dieselbe dermassen vorzustellen, dass, wenn man von der Grundbeziehung ihrer Art so, wie man von ihr auf die Beziehung ϱ zu übergehen hat, *n* mal nach einander übergeht, man zur vorgegebenen Beziehung ϱ des Radicands gelangt.

Denkt man sich demnach, ein umlaufender Gegenstand habe aus seiner Urstellung diejenige Drehung vollbracht, welche die Ablenkung der Beziehung ϱ des Radicands von der Grundbeziehung versinnlicht, so dass seine letzte Stellung diese Beziehung ϱ des Radicands markirt; und theilt man jene Drehung in *n* gleiche Drehungsabtheilungen: so versinnlicht jede solche Theildrehung die Ablenkung der Beziehung $\sqrt[n]{\varrho}$ der

n^{ten} Wurzel, und die Stellung des umlaufenden Gegenstandes am Ende der ersten Theildrehung signalisirt diese Beziehung $\sqrt[n]{\varrho}$ der n^{ten} Wurzel selbst.

§. 32.

Beziehungen der Wurzeln aus negativ beziehlichen Zahlen insbesondere.

Der Zweck unserer Untersuchungen erheischt, dass wir den Fall besonders hervorheben und erforschen, wo die Beziehung des Radicands der Grund- oder positiven Beziehung entgegengesetzt, also negativ, folglich $\varrho = -$ ist. Wird hier, wie vorher (§. 31), die zu suchende Beziehung φ der Wurzel mit $\sqrt[n]{-}$ oder $(-)^{\frac{1}{n}}$ bezeichnet, also $\sqrt[n]{-} = \varphi$ gesetzt; so muss $\varphi^n = -$ oder auch, wenn man sich der anderen Zeichen bedient, $(\sqrt[n]{-})^n = -$ oder $[(-)^{\frac{1}{n}}]^n = -$ sein.

Die Beziehung der n^{ten} Wurzel aus einer negativ beziehlichen Zahl, bezeichnet durch $\sqrt[n]{-}$ oder $(-)^{\frac{1}{n}}$ muss daher dergestalt gewählt werden, dass man, wenn man in derselben Weise, in welcher man von der Grundbeziehung ihrer Art auf sie übergeht, in Allem n mal nach einander vorschreitet, man zur negativen, nämlich zu der der Grundbeziehung entgegengesetzten Beziehung gelangt, oder dass sie n fach aufgestuft die *negative* Beziehung werde, welche dem Radicande anhaftet. Sie ist demnach die n fach *abgestufte* oder zum n^{ten} Theile negative Beziehung.

Die Ablenkung der Beziehung der n^{ten} Wurzel aus einer negativ beziehlichen Zahl von der Grundbeziehung beträgt daher den n^{ten} Theil der Ablenkung der negativen Beziehung von der positiven, d. i. den n^{ten} Theil des Gegensatzes.

Denkt man sich also, weil dem Gegensatze der Beziehung die Umkehrung oder die halbe Umdrehung eines um eine Axe umlaufenden Gegenstandes entspricht, die Umkehrung oder die halbe Umdrehung in n gleiche Drehungsabtheilungen zertheilt: so versinnlicht jeder solche n^{te} Theil der Umkehrung oder der halben Umdrehung die Ablenkung der Beziehung $\sqrt[n]{-}$ der n^{ten} Wurzel aus einem negativ beziehlichen Radicand, oder der n fach abgestuften negativen Beziehung von der Grundbeziehung; und die Stellung des umlaufenden Gegenstandes am Ende der ersten solchen Theildrehung markirt diese Beziehung $\sqrt[n]{-}$ der n^{ten} Wurzel selbst.

§. 33.

Berücksichtigung des Geradseins der Wurzelexponenten, und Nachweis der Realität der sonst für unmöglich erklärten Wurzeln geraden Ranges aus negativ beziehlichen Zahlen.

Ist nun bei der Bestimmung einer Wurzel aus einer negativ beziehlichen Zahl

1. *der Wurzelexponent ungerad,* so genügt es, die Beziehung der Wurzel negativ — also noch immer direct — zu nehmen; weil die negativ bezogene Wurzel, nach dem ungeraden Wurzelexponenten potenzirt, wieder eine mit dem Radicand nicht nur in der Grösse, sondern auch in der negativen Beziehung übereinstimmende Potenz gibt.

2. Ist dagegen *der Wurzelexponent gerad;* so genügt zwar *keine directe* Beziehung mehr, weder die positive noch die negative (vergl. §. 20), aber doch immerhin *eine abweichende Beziehung*, und namentlich die so vielfach abgestufte negative, als der Wurzelexponent zählt.

Allein die Algebra muss, wie wir in §. 23 und 27 dargethan haben, um ihren Grundcharakter — Allgemeinheit — zu bewahren, in ihren allgemeinen Erforschungen der Grössen, die Möglichkeit und das Vorhandensein von abweichenden Beziehungen als Regel oder Norm wirklich unbedingt anerkennen, und kann bloss in besonderen Forschungen, mithin als Ausnahme, den Nichtbestand abweichender Beziehungen zugestehen. Daher fordert in allgemeinen Forschungen der Algebra die Bestimmung der Beziehung einer Wurzel geraden Ranges aus negativ beziehlichen Zahlen durchaus nichts Unmögliches; oder *die Beziehung* einer solchen Wurzel ist, als eine ab- oder ausweichende, *weder unmöglich noch eingebildet* (einbildsam, imaginär), folglich eben sowohl wie jede der beiden directen Beziehungen, die positive und negative, *möglich, wirklich* (reell.)

Desswegen ist auch die Unterscheidung der algebraischen Grössen und Zahlen, oder eigentlich ihrer Beziehungen, in mögliche und unmögliche, wirkliche und eingebildete, reelle und imaginäre unhaltbar und muss darum hinfort für immer aufgegeben werden.

§. 34.

Schluss dieser Betrachtungen.

Und somit haben wir denn nicht nur die bisherige Theorie der imaginären Grössen, insbesondere der imaginären Wurzeln, schon von ihrer Grundlage aus, mit strengstens erhärtetem Rechte, umgestossen; sondern auch dafür die richtige Lehre von dem Abweichen der Beziehungen der Grössen überhaupt, und der Wurzeln geraden Ranges aus negativ beziehlichen Zahlen insbesondere, aufgestellt: also nicht allein ein altes, unhaltbares Lehrgebäude vom Grunde aus zusammengestürzt, sondern auch dafür ein neues, haltbares, auf festen Grundpfeilern aufgebaut; wie diess — wenn sonst möglich — von jeder auf Vervollkommnung der Wissenschaften abzielenden Umwälzung bestehender irriger Lehren geleistet werden soll.

Schreiten wir nunmehr zur weiteren Auseinandersetzung und Anwendung dieser unserer neuen Lehre, wo die Übereinstimmung unserer durchweg streng begründeten Ergebnisse, sowohl mit ähnlichen — sogar schon von der irrigen Lehre auf dem Wege glücklicher Indagation gefundenen — Ergebnissen, als auch mit der Stetigkeit des Abweichens der Beziehungen, jeden etwa noch übrigen Zweifel heben wird.

Drittes Hauptstück.

Weitere Auseinandersetzung der Lehre von den abweichenden Beziehungen der Wurzeln.

A. Vieldeutigkeit der Beziehungen der Wurzeln.

§. 35.

Vorbereitende Bemerkung.

Für die Verfolgung unseres Hauptzweckes hatten wir im Vorhergehenden die Beziehung der Wurzeln aus negativ beziehlichen Zahlen nur von Einer Seite betrachtet; gegenwärtig nehmen wir sie *von allen Seiten* in ausführliche Untersuchung.

§. 36.

Vergleichung der Beziehungen der Wurzeln aus negativ und aus positiv beziehlichen Zahlen.

Sei φ die Beziehung der n^{ten} Wurzel aus einer negativ beziehlichen Zahl, nämlich $\sqrt[n]{-} = \varphi$, so muss $\varphi^n = -$ sein. Erhebt man aber zwei in den gleichen Beziehungen φ^n und $-$ stehende Zahlen zur zweiten Potenz; so fallen die Beziehungen solcher zweiten Potenzen gleich, also beide positiv aus, nämlich es ist $(\varphi^n)^2 = (-)^2 = +$.

Eine Zahl wird ferner nach mehreren Exponenten nach einander potenzirt, wenn man sie nach dem Producte der Exponenten potenzirt, und daher kann man auch in beliebiger Ordnung der Exponenten potenziren. Folglich ist

$$(\varphi^n)^2 = \varphi^{2n} = (\varphi^2)^n = +.$$

Nun folgert man

1. aus $\varphi^{2n} = +$ umgekehrt $\sqrt[2n]{+} = \varphi$ also auch $\sqrt[2n]{+} = \sqrt[n]{-}$,

d. h. *Die Beziehung der Wurzel n^{ten} Grades aus einer negativ beziehlichen Zahl ist auch die Beziehung der Wurzel des doppelt höheren $2n^{\text{ten}}$ Grades aus einer positiv beziehlichen Zahl.*

2. Aus $(\varphi^2)^n = +$ dagegen folgt umgekehrt $\sqrt[n]{+} = \varphi^2$ oder $\sqrt[n]{+} = (\sqrt[n]{-})^2$,

d. h. *Die Beziehung der Wurzel n^{ten} Grades aus einer negativ beziehlichen Zahl zweifach aufgestuft ist auch die Beziehung der Wurzel desselben n^{ten} Grades aus einer positiv beziehlichen Zahl.*

Die Beziehungen der Wurzeln aus positiv beziehlichen Zahlen ergeben sich demnach leicht aus den Beziehungen der Wurzeln negativ beziehlicher Zahlen; es genügt daher, nur die letzteren zu bestimmen.

Bei einem umlaufenden Gegenstande weist seine Urstellung auf die Grund- oder positive Beziehung $+$ hin; nach vollbrachter halber Umdrehung weist seine Stellung auf die negative Beziehung $-$, und nach vollendeter ganzer Umdrehung weist sie wieder auf die positive $+$. Mithin muss seine Stellung nach zurückgelegtem $n$ten Theile der halben oder $2n^{\text{ten}}$ Theile der ganzen Umdrehung auf die $n$fach abgestufte negative oder auch auf die $2n$fach abgestufte positive Beziehung, also auch auf die Beziehung der n^{ten} Wurzel aus einer negativ, oder auf die der $2n^{\text{ten}}$ Wurzel aus einer positiv beziehlichen Zahl weisen. Nach vollbrachter doppelter solcher Drehung, also dem n^{ten} Theile der vollen Umdrehung, muss sie daher eben sowohl auf die zweifach aufgestufte Beziehung der n^{ten} Wurzel aus negativ beziehlichen Zahlen als auf die Beziehung derselben Wurzel aus positiv beziehlichen verweisen.

Versteht man die Ablenkungen der Beziehungen jederzeit so, dass sie allesammt *von der Grundbeziehung aus* genommen werden; so beträgt die Ablenkung der $\sqrt[n]{-}$ den n^{ten} Theil des Gegensatzes oder der Umlenkung, also auch gerade so den $2n^{\text{ten}}$ Theil der vollen Ringsumlenkung, wie die Ablenkung der $\sqrt[2n]{+}$, und die Ablenkung dieser zweifach aufgestuften Beziehung $\sqrt[n]{-}$, nämlich der $(\sqrt[n]{-})^2$, beträgt, so wie jene der $\sqrt[n]{+}$, den n^{ten} Theil der doppelten Umlenkung oder der Ringsumlenkung.

§. 37.

Gleichheit aufgestufter Beziehungen von Wurzeln aus negativ beziehlichen Zahlen.

Höchst merkwürdig sind nun die Folgen der so eben gefundenen Ergebnisse.

Multiplicirt man eine beliebige, die k^{te} Potenz einer in der Beziehung $\sqrt[n]{-} = \varphi$ stehenden Zahl einmal mit der n^{ten} und ein anderes Mal mit der $2n^{\text{ten}}$ Potenz derselben Zahl, wobei also diese 3 Potenzen die Beziehungen φ^k, $\varphi^n = -$, $\varphi^{2n} = +$ besitzen; so ergeben sich als Producte dort die $k+n^{\text{te}}$ und hier die $k+2n^{\text{te}}$ Potenz derselben Zahl. Danach ist die Beziehung des ersteren Productes einerseits φ^{k+n}, andrerseits $-\varphi^k$
und die „ letzteren „ „ φ^{k+2n}, „ $+\varphi^k$;
mithin ist die Beziehung $\varphi^{k+n} = -\varphi^k$ und $\varphi^{k+2n} = \varphi^k$.

Wird demnach die Beziehung der $n$ten Wurzel aus einer negativ beziehlichen Zahl beliebig oft aufgestuft, so sind jede zwei um $\left\{\begin{matrix} n \\ 2n \end{matrix}\right.$ *Stufen verschiedene Beziehungen einander* $\left\{\begin{matrix} \textit{entgegengesetzt,} \\ \textit{gleich.} \end{matrix}\right.$

Lenkt nämlich eine veränderliche Beziehung von der Grundbeziehung aus, so wie die Beziehung $\varphi = \sqrt[n]{-}$, erstlich $k$mal ab, so gelangt sie zur Beziehung φ^k. Lenkt sie sodann noch $n$mal, folglich weil (vermöge §. 36) $\varphi^n = -$ ist, um den Gegensatz oder um die Umlenkung weiter ab; so kommt sie zu der der Beziehung φ^k entgegengesetzten $-\varphi^k$.

Lenkt sie dagegen noch $2n$ mal, folglich weil (vermöge §. 36) $\varphi^{2n} = +$ ist, um die doppelte Umlenkung oder um die Ringsumlenkung weiter ab; so kommt sie zur Beziehung φ^k selbst zurück.

Hat ein umlaufender Gegenstand von seiner die Grundbeziehung markirenden Urstellung aus den n^{ten} Theil des halben Umlaufs k mal zurückgelegt; so markirt seine Stellung die Beziehung φ^k. Macht er sodann noch n mal eine solche Theildrehung, also einen halben Umlauf weiter; so kommt er in die der vorigen entgegengesetzte Stellung, welche daher auch die entgegengesetzte Beziehung φ^k markirt. Macht er aber noch $2n$ mal eine solche Theildrehung, also einen ganzen Umlauf weiter; so kehrt er in seine vorige Stellung zurück, welche daher auch wieder die vorige Beziehung φ^k markirt.

II. Vergrössert man nun sowohl in $\varphi^n = -$ als in $\varphi^{2n} = +$ die Aufstufungszahl fortwährend um $2n$, so findet man

$$- = \varphi^n = \varphi^{3n} = \varphi^{5n} = \varphi^{7n} = \ldots\ldots = \varphi^{n+(a-1)2n}$$
$$+ = \varphi^{2n} = \varphi^{4n} = \varphi^{6n} = \varphi^{8n} = \ldots\ldots = \varphi^{2n+(a-1)2n}$$

wo a eine sogenannte *durchlaufende*, das ist ganze absolute Zahl von 1 an vorstellt, also $a = 1, 2, 3, \ldots.$ ist.

Dem in §. 36 Angeführten gemäss können diese Gleichheiten aber auch so dargestellt werden:

$$- = \varphi^n = (\varphi^3)^n = (\varphi^5)^n = (\varphi^7)^n = \ldots = (\varphi^{2a-1})^n$$
$$+ = (\varphi^2)^n = (\varphi^4)^n = (\varphi^6)^n = (\varphi^8)^n = \ldots = (\varphi^{2a})^n.$$

Wiederholt man eine Drehung, welche was immer für ein $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gerades}}{\text{ungerades}}$ Vielfaches vom n^{ten} Theile des halben Umlaufs beträgt, n mal nach einander; so macht die Gesammtdrehung eine $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gerade}}{\text{ungerade}}$ Anzahl halber Umläufe aus, also halb so viel ganze Umläufe $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{ohne einen}}{\text{mit einem}}$ weiteren halben Umlauf; und der umlaufende Gegenstand bleibt bei seiner $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{anfänglichen,}}{\text{entgegengesetzten,}}$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiven}}{\text{negativen}}$ Stellung stehen.

§. 38.

Vielfältige Beziehungen der Wurzeln.

Ist demnach φ eine Beziehung der n^{ten} Wurzel aus einer *negativ* beziehlichen Zahl, so sind auch noch alle ihre *ungeradzähligen* Aufstufungen φ^3, φ^5, φ^7, ... Beziehungen derselben Wurzel, ihre *geradzähligen* aber, φ^2, φ^4, φ^6, ... Beziehungen der eben so vielten Wurzel aus einer *positiv* beziehlichen Zahl.

Die Beziehung jeder Wurzel aus einer direct, positiv oder negativ, beziehlichen Zahl ist demnach eine *mehr- oder vieldeutige*, eine mehr- oder vielförmige, nicht bloss eine *eindeutige* oder einförmige, wie ursprünglich vorausgesetzt worden war.

Damit stimmt der bekannte Umstand, dass jede Wurzel geraden Ranges aus einer positiv beziehlichen Zahl sowohl positiv als negativ beziehlich genommen werden kann (§. 20).

Diess veranlasst uns, bloss diejenige Beziehung einer Wurzel, die am wenigsten von der Grundbeziehung ablenkt, wie bisher immer geschehen, durch das einfache Wurzelzeichen, $\sqrt{\ }$, oder durch einfache Klammern, ( ), dagegen die allgemeine mehrdeutige Beziehung derselben, nach *Cauchy's* bekanntem Vorgange, durch ein doppeltes Wurzelzeichen, W, oder durch doppelte Klammern, (( )), zu bezeichnen.

Setzen wir also noch immer Kürze halber die am wenigsten ablenkende Beziehung $\sqrt[n]{-} = \varphi$, so ist die mehrdeutige Beziehung

$$\overset{n}{W} - = \varphi, \varphi^3, \varphi^5, \ldots\ldots \varphi^{2a-1}$$
$$\overset{n}{W} + = \varphi^2, \varphi^4, \varphi^6, \ldots\ldots \varphi^{2a}.$$

§. 39.

Ausdehnung dieser Vieldeutigkeit.

Die Anzahl dieser verschiedenen Beziehungen einer Wurzel ist jedoch keineswegs beliebig gross, sondern *nur gerade so gross wie der Wurzelexponent.*

Denn würde die Aufstufungszahl $2a-1$ oder $2a$ der Beziehung φ den doppelten Wurzelexponenten, $2n$, übersteigen; so gäbe es zu ihr eine um $2n$ kleinere, $(2a-1)-2n = 2(a-n)-1$ oder $2a-2n = 2(a-n)$; folglich zur später kommenden Beziehung φ^{2a-1} oder φ^{2a} eine ihr *gleiche* vorausgehende $\varphi^{2(a-n)-1}$ oder $\varphi^{2(a-n)}$; d. h. die öfter als $2n$ mal aufgestuften Beziehungen würden nur Wiederholungen der früheren in der nämlichen Ordnung sein.

Damit also alle fraglichen Beziehungen *verschieden* ausfallen, darf $2a-1$, als ungerade Zahl, höchstens noch die der geraden Zahl $2n$ unmittelbar vorangehende ungerade $2n-1$; und $2a$, als gerade Zahl, höchstens noch der geraden Zahl $2n$ selbst gleich angenommen werden, als: $2a-1 = 2n-1$ oder $2a = 2n$; mithin kann jedenfalls höchstens $a = n$ sein.

Demgemäss sind die n verschiedenen Beziehungen der n^{ten} Wurzeln

$$\overset{n}{W} - = \varphi, \varphi^3, \varphi^5, \ldots\ldots \varphi^{2n-1}$$
$$\overset{n}{W} + = \varphi^2, \varphi^4, \varphi^6, \ldots\ldots \varphi^{2n}.$$

§. 40.

Abgeänderte Darstellung dieser vieldeutigen Beziehungen.

Aber selbst von diesen $2n$ Beziehungen $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \ldots\ldots \varphi^{2n}$, ist nur die erste Hälfte $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \ldots\ldots \varphi^{n-1}, \varphi^n = -$ unter sich durchgängig verschieden, weil die zweite

Hälfte $\varphi^{n+1}, \varphi^{n+2}, \varphi^{n+3}, \ldots \varphi^{2n-1}, \varphi^{2n} = +$, gemäss §. 37, der ersten entgegengesetzt, nämlich $= -\varphi, -\varphi^2, -\varphi^3, \ldots -\varphi^{n-1}, +$, ist.

Man muss daher, um obige Beziehungen der Wurzeln einfacher darzustellen, unterscheiden, ob der Wurzelexponent n ungerad oder gerad ist.

a) Ist der Wurzelexponent n ungerad, so sind

die Zahlen $n-2,\ n,\ n+2$ ungerad,

und „ „ $n-1,\ n+1$ gerad.

Da nun $\overset{n}{W} - = \varphi, \varphi^3, \varphi^5, \ldots \varphi^{n-2}, \varphi^n, \varphi^{n+2}, \varphi^{n+4}, \ldots \varphi^{2n-1}$

$\overset{n}{W} + = \varphi^2, \varphi^4, \varphi^6, \ldots \varphi^{n-1}, \varphi^{n+1}, \varphi^{n+3}, \varphi^{n+5}, \ldots \varphi^{2n-2}, \varphi^{2n}$

ist, so hat man auch noch

$$\overset{n}{W} - = \varphi, \varphi^3, \varphi^5, \ldots \varphi^{n-2}, -, \ -\varphi^2, -\varphi^4, \ldots -\varphi^{n-1};$$

$$\overset{n}{W} + = \varphi^2, \varphi^4, \varphi^6, \ldots \varphi^{n-1}, -\varphi, -\varphi^3, -\varphi^5, \ldots -\varphi^{n-2}, +,$$

oder

$$\overset{n}{W} - = \varphi, \ \varphi^3, \ \varphi^5, \ldots \varphi^{n-2}, -,$$
$$-\varphi^2, -\varphi^4, -\varphi^6, \ldots -\varphi^{n-1};$$

$$\overset{n}{W} + = \varphi^2, \ \varphi^4, \ \varphi^6, \ldots \varphi^{n-1}$$
$$-\varphi, -\varphi^3, -\varphi^5, \ldots -\varphi^{n-2}, +.$$

b) Ist aber der Wurzelexponent n gerad, so sind

die Zahlen $n-1,\ n+1$ ungerad,

und „ „ $n-2,\ n,\ n+2$ gerad.

Da nun $\overset{n}{W} - = \varphi, \varphi^3, \varphi^5, \ldots \varphi^{n-1}, \varphi^{n+1}, \varphi^{n+3}, \varphi^{n+5}, \ldots \varphi^{2n-1}$

$\overset{n}{W} + = \varphi^2, \varphi^4, \varphi^6, \ldots \varphi^{n-2}, \varphi^n, \varphi^{n+2}, \varphi^{n+4}, \ldots \varphi^{2n-2}, \varphi^{2n}$

ist, so hat man auch noch

$$\overset{n}{W} - = \varphi, \varphi^3, \varphi^5, \ldots \varphi^{n-1}, -\varphi, -\varphi^3, -\varphi^5, \ldots -\varphi^{n-1};$$

$$\overset{n}{W} + = \varphi^2, \varphi^4, \varphi^6, \ldots \varphi^{n-2}, - \ , -\varphi^2, -\varphi^4, \ldots -\varphi^{n-2}, +;$$

oder

$$\overset{n}{W} - = \pm\varphi, \pm\varphi^3, \pm\varphi^5, \ldots \pm\varphi^{n-1}$$

$$\overset{n}{W} + = \pm\varphi^2, \pm\varphi^4, \pm\varphi^6, \ldots \pm\varphi^{n-2}, \mp.$$

Will man die Beschaffenheit des Wurzelexponenten sogleich in die Rechnungsform aufnehmen, so setzt man dort $n = 2r + 1$, hier $n = 2r$, und erhält

$$\overset{2r+1}{W} - = \ \varphi, \ \varphi^3, \ \varphi^5, \ldots \varphi^{2r-1}, -,$$
$$-\varphi^2, -\varphi^4, -\varphi^6, \ldots -\varphi^{2r-2};$$

$$\overset{2r+1}{W} + = \ \varphi^2, \ \varphi^4, \ \varphi^6, \ldots \varphi^{2r-2}$$
$$-\varphi, -\varphi^3, -\varphi^5, \ldots -\varphi^{2r-1}, +;$$

$$\overset{2r}{W} - = \pm\varphi, \pm\varphi^3, \pm\varphi^5, \ldots \pm\varphi^{2r-1},$$

$$\overset{2r}{W} + = \pm\varphi^2, \pm\varphi^4, \pm\varphi^6, \ldots \pm\varphi^{2r-2}, \mp.$$

§. 41.

Schlussfolgen.

Aus diesen Reihen der vielfältigen Beziehungen der Wurzeln aus direct beziehlichen Zahlen ersieht man nun leicht folgende allgemeine, die früheren besonderen Sätze (§. 20) in sich fassende *Lehrsätze*:

1. Von den Beziehungen einer Wurzel *ungeraden* Ranges aus einer direct, namentlich positiv, negativ, beziehlichen Zahl ist bloss *Eine direct*, und zwar mit des Radicands Beziehung *einstimmig*, nämlich positiv, negativ, alle übrigen aber sind abweichend.

2. Unter den Beziehungen einer Wurzel *geraden* Ranges aus einer *positiv* beziehlichen Zahl befinden sich *beide directe*, die positive und die negative, alle anderen aber sind abweichend.

3. Unter den Beziehungen einer Wurzel *geraden* Ranges aus einer *negativ* beziehlichen Zahl befindet sich *gar keine directe*, sondern sie sind *insgesammt abweichend.*

Noch findet man, entweder wenn man oben $\varphi^2 = \psi$ setzt, d. h. die am mindesten abweichende Beziehung der n^{ten} Wurzel aus einer positiv beziehlichen Zahl durch ψ bezeichnet, oder durch eine der vorigen ähnliche für sich bestehende Forschung, die Beziehung

$$\overset{n}{W}+ = \psi,\ \psi^2,\ \psi^3, \ldots\ldots \psi^{n-1},\ +.$$

und

$$\overset{2r+1}{W}+ = \psi,\ \psi^2,\ \psi^3, \ldots\ldots \psi^{r-1},$$
$$-\varphi,\ -\varphi^3,\ -\varphi^5, \ldots\ldots -\varphi^{2r-1},\ +,$$
$$\overset{2r}{W}+ = \pm\psi,\ \pm\psi^2,\ \pm\psi^3, \ldots\ldots \pm\psi^{r-1},\ \pm.$$

Danach lassen sich also sämmtliche Beziehungen der n^{ten} Wurzeln aus positiv beziehlichen Zahlen auch an und für sich, ohne Rücksicht auf jene aus negativ beziehlichen Zahlen, bestimmen.

§. 42.

Versinnlichung der vieldeutigen Beziehungen von Wurzeln.

Alle diese Sätze über die Beträge des Ablenkens der Beziehungen, und über die Vieldeutigkeit der Beziehung einer Wurzel aus einer direct beziehlichen Zahl hält in einem Bilde am deutlichsten und überschaulichsten ein Speichenrad vor Augen, welches, wenn des Radicands Beziehung positiv / negativ ist, gerade / doppelt so viel Speichen besitzt, als die wie vielte Wurzel zu ziehen ist. Die Figuren 1—9 auf Taf. 1 stellen solche Räder dar. In ihnen allen sieht die auf die Grundbeziehung + hinweisende 0te Speiche rechts.

Fig. 1. *Zwei* Speichen zur Darstellung der $\overset{2}{W}+$.

Speiche Nr. 1 , 2 ,

markirt die Beziehung $\sqrt[2]{+}$, $(\sqrt[2]{+})^2$,

oder „ „ $-$, $+$.

Fig. 2. *Vier* Speichen zur Darstellung der $\overset{4}{W}+$.

Speiche Nr. 1 , 2 , 3 , 4 ,

markirt die Beziehung $\sqrt[4]{+}$, $(\sqrt[4]{+})^2$, $(\sqrt[4]{+})^3$, $(\sqrt[4]{+})^4$,

oder „ „ $\sqrt[4]{+}$, $-$, $-\sqrt[4]{+}$, $+$.

Fig. 3. *Vier* Speichen zur Darstellung der $\overset{2}{W}-$ und $\overset{2}{W}+$.

Speiche Nr. 1 , 3 , | 2 , 4 ,

markirt die Beziehung $\overset{2}{W}- = \sqrt[2]{-}$, $(\sqrt[2]{-})^3$, | $\overset{2}{W}+ = (\sqrt[2]{-})^2$, $(\sqrt[2]{-})^4$,

oder „ „ $\sqrt[2]{-}$, $-\sqrt[2]{-}$ | $-$, $+$.

Fig. 4. *Drei* Speichen. Speiche Nr. 1 , 2 , 3 ,

Beziehung $\overset{3}{W}+ = \sqrt[3]{+}$, $(\sqrt[3]{+})^2$, $(\sqrt[3]{+})^3$.

$= \sqrt[3]{+}$, $(\sqrt[3]{+})^2$, $+$.

Fig. 5. *Sechs* Speichen. Speiche Nr. 1. , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 ,

Beziehung $\overset{6}{W}+ = \sqrt[6]{+}$, $(\sqrt[6]{+})^2$, $(\sqrt[6]{+})^3$, $(\sqrt[6]{+})^4$, $(\sqrt[6]{+})^5$, $(\sqrt[6]{+})^6$.

$= \sqrt[6]{+}$, $(\sqrt[6]{+})^2$, $-$, $-\sqrt[6]{+}$, $-(\sqrt[6]{+})^2$, $+$.

Fig. 6. *Sechs* Speichen. Speiche Nr. 1 , 3 , 5 , | 2 , 4 , 6

Beziehung $\overset{3}{W}- = \sqrt[3]{-}$, $(\sqrt[3]{-})^3$, $(\sqrt[3]{-})^5$. | $\overset{3}{W}+ = (\sqrt[3]{-})^2$, $(\sqrt[3]{-})^4$, $(\sqrt[3]{-})^6$

$= \sqrt[3]{-}$, $-$, $-(\sqrt[3]{-})^2$; | $= (\sqrt[3]{-})^2$, $-\sqrt[3]{-}$, $+$.

Fig. 7. *Fünf* Speichen. Speiche Nr. 1 , 2 , 3 , 4 , 5,

Beziehung $\overset{5}{W}+ = \sqrt[5]{+}$, $(\sqrt[5]{+})^2$, $(\sqrt[5]{+})^3$, $(\sqrt[5]{+})^4$, $+$.

Fig. 8. *Zchn* Speichen.

Speiche Nr. 1 , 2 , 3 , 4 , 5, 6 , 7 , 8 , 9 10

Beziehung $\overset{10}{W}+ = \sqrt[10]{+}$, $(\sqrt[10]{+})^2$, $(\sqrt[10]{+})^3$, $(\sqrt[10]{+})^4$, $-$, $-\sqrt[10]{+}$, $-(\sqrt[10]{+})^2$, $-(\sqrt[10]{+})^3$, $-(\sqrt[10]{+})^4$, $+$.

Fig. 9. *Zehn* Speichen.

Speiche Nr. 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , | 2 , 4 , 6 , 8 , 10,

Beziehung $\overset{5}{W}- = \sqrt[5]{-}$, $(\sqrt[5]{-})^3$, $-$, $-(\sqrt[5]{-})^2$, $-(\sqrt[5]{-})^4$ | $\overset{5}{W}+ = (\sqrt[5]{-})^2$, $(\sqrt[5]{-})^4$, $-\sqrt[5]{-}$, $-(\sqrt[5]{-})^3$, $+$

B. Besondere Betrachtung der elusiven oder transversiven Beziehungen, als jener der zweiten Wurzeln aus negativ beziehlichen Zahlen.

§. 42.

Bezeichnung der transversiven Beziehungen.

Höchst wichtig für die Erforschung der abweichenden Beziehungen ist die Untersuchung der beiden Beziehungen, welche jeder Wurzel des möglich niedersten, nämlich des zweiten Ranges, zukommen. Dem Vorhergehenden (§. 40) gemäss ist diese Beziehung überhaupt

$$\overset{2}{W}- = (\sqrt[2]{\;}-,\ -\sqrt[2]{\;}-) = \pm\sqrt[2]{\;}-.$$

Gewöhnlich schreibt man den Wurzelexponenten 2 nicht, daher auch bloss

$$W- = (\sqrt{\;}-,\ -\sqrt{\;}-) = \pm\sqrt{\;}-.$$

Die Beziehungen der zweiten Wurzel aus einer negativ beziehlichen Zahl sind also die beiden einander entgegengesetzten transversiven oder elusiven Beziehungen, welche von den beiden directen oder declarativen gleichweit ablenken, oder deren Ablenkung von der Grundbeziehung die Hälfte der Ablenkung der negativen Beziehung von der positiven, also die Hälfte des Gegensatzes oder der Umlenkung beträgt, und die darum wohl auch *halb-negative* genannt werden könnten.

Dieses Ergebniss würde uns ein Mittel darbieten, die transversive Beziehung zu bezeichnen, nämlich durch $\sqrt{\;}-$ oder durch $(-)^{\frac{1}{2}}$. Allein die Weitläufigkeit dieser Bezeichnung und das ungemein häufige Vorkommen transversiv beziehlicher Zahlen in der Analysis überhaupt, und im Verlauf der vorliegenden Abhandlung insbesondere, nöthigt mich, trotz meiner Abneigung vor Zeichenschmiederei, zur Andeutung des Halbnegativen oder Transversiven, den aus — und ∟, den Zeichen des Negativen oder des Geraden und der Querwendung oder des rechten Winkels, zusammengezogenen *Pfeil* ↓ *vorzuschlagen*, welcher dadurch, dass er aus der geradehin laufenden Schriftzeile herausweist, die Ablenkung der transversiven Beziehung von der directen veranschaulicht, wenig Raum einnimmt, ganz einfach mit nur zwei Schriftzügen geschrieben wird, und mit Buchstaben oder anderen Rechnungszeichen nicht leicht zu verwechseln ist.

Es versteht sich dabei, dass dieses Beziehungszeichen ↓, welches wir „transversiv oder elusiv beziehlich *)“ lesen wollen, so wie die Zeichen der beiden directen Beziehungen, + und —, gelesen „positiv und negativ beziehlich,“ *) dem Zeichen (Buchstaben) der transversiv beziehlich genommenen Grösse oder Zahl *jederzeit vorgestellt* werden muss, und eben so wenig wie eines der beiden letzteren für einen Multiplicator dieser Grösse angesehen werden darf.

So heisse denn $\downarrow A$ die transversiv oder elusiv beziehliche Grösse A. Wo die elusive Beziehung selbst wieder in die ursprünglich gedachte — positive — und in die ihr

*) Beim Schnelllesen mag „beziehlich“ hinwegbleiben, aber doch stets *hinzugedacht* werden.

entgegengesetzte — negative — unterschieden wird, da ist dem Zeichen $\downarrow$ auch noch das erforderliche Zeichen $+$ oder $-$ vorzustellen. Sonach bedeutet

$+\downarrow A$ die positiv,

$-\downarrow A$ die negativ elusiv beziehliche Grösse A.

Dieser Beziehung gemäss ist

$$\sqrt{-} = (-)^{\frac{1}{2}} = \downarrow = +\downarrow,\quad \sqrt[4]{-} = ((-))^{\frac{1}{4}} = +\downarrow \text{ und } = -\downarrow;$$

also $\sqrt{-a} = \downarrow\sqrt{a} = +\downarrow\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{-a} = (\downarrow\sqrt{a}, -\downarrow\sqrt{a}) = \pm\downarrow\sqrt{a}$,

insbesondere $\sqrt{-1} = \downarrow 1 = +\downarrow 1$, $\sqrt[4]{-1} = (\downarrow 1, -\downarrow 1) = \pm\downarrow 1$.

Anmerkung. *Gauss* und nach ihm mehre deutsche Analysten bezeichnen die zweite Wurzel aus der negativ bezogenen Eins, $\sqrt{-1}$, also unsere elusiv oder transversiv beziehliche Eins, $\downarrow 1$, durch den Buchstaben i; welcher sonst löbliche Gebrauch jedoch von den französischen Analysten, trotz der anerkannten Autorität unseres deutschen Mathematikers, bisher noch nicht nachgeahmt worden ist. Obwohl wir ohne Mühe alle unseren ferneren Forschungen auf diese durch i bezeichnete Einheit zurückleiten könnten; so vermeiden wir dennoch einen solchen Vorgang aus folgenden Gründen.

1. Würden wir uns gegen die unabweisliche Consequenz verfehlen, mit der wir selbst bei jeglicher Grösse jederzeit ihre *Grösse* von ihrer *Beziehung* strengstens unterschieden wissen wollen (§. 12.)

2. Sagt es unseren Grundansiehten nicht zu, mit *Gauss* (*Theoria residuorum biquadraticorum, comment.* 2[da], *Gottingae*, 1832, *art.* 31 *et* 38) *viererlei* Einheiten, $+1, -1, +i, -i$, die er „direct, invers, direct- lateral und invers- lateral" nennt, einzuführen, da wir wegen der unendlichen Mannigfaltigkeit des Abweichens der Beziehungen eigentlich unzähligerlei Einheiten annehmen müssten. Dagegen erachten wir zufolge unserer Grundlehren für naturgemäss, zur Bemessung der Grösse jeglicher Art ***bloss eine einzige Einheit*** festzusetzen, aber zur Modification des Aggregirens der Grössen *allerhand Beziehungen* zuzugestehen, von denen die mit $+$, $-$, $\downarrow$ bezeichneten drei, die positive, negative und elusive, den übrigen als Grundlage dienen.

3. Es ist $i = \downarrow 1$ das Zeichen der transversiv beziehlichen (Mess-)Einheit, und bedingt daher, dass man jederzeit die Grössen bereits *ausgemessen* und durch Zahlen dargestellt habe; diess ist jedoch eine die Allgemeinheit der mathematischen Forschungen ohne Noth beeinträchtigende Beschränkung, da der Mathematiker *auch nichtgemessene* Grössen, so wie sie sind, vornehmlich in der Geometrie, in Rechnung nimmt, ja sogar nehmen muss.

4. Weil die Buchstaben d, e, g, l, o, bereits anderweitig mit ständigen Bedeutungen in der Analysis verwendet werden, so bleiben von dem kleinen lateinischen Alphabete nur noch 21 Buchstaben zur freien Verfügung; desswegen müssen wir schon zu allerhand Abzeichen an den Buchstaben unsere Zuflucht nehmen; warum soll man auch noch dem i eine fixe Bedeutung beilegen, das sich so zweckmässig und vielfach zur Bezeichnung der *ganzen* Zahlen verwenden lässt?

5. *Gauss* will die Benennung „imaginär" durch „lateral" ersetzt wissen, und schreibt in der Bezeichnung doch den Anfangsbuchstaben von jener.

6. Der Buchstabe *i* wird wie das Pfeilzeichen ↓ auch mit *zwei* Federstrichen geschrieben, bietet also in der Schnelligkeit des Schreibens keinen Vortheil vor diesem.

§. 44.

Negative Beziehung eines Productes zweier gleichnamig elusiv beziehlichen Factoren.

Man weiss aus §. 18, dass, so oft der Multiplicand und Multiplicator in gleichnamigen directen Beziehungen, entweder beide in der positiven, oder beide in der negativen Beziehung, vorkommen, ihr Product *jedesmal nur in der positiven* Beziehung genommen werden muss; folglich dass, sobald Directheit und Gleichnamigkeit der Beziehungen beider Factoren bedungen ist, die Beziehung des Productes *niemals negativ* ausfallen kann. Nun kommt aber die im Vorhergehenden (§. 32) um die Beziehung der zweiten Wurzel aus einer negativ beziehlichen Zahl gestellte Frage eigentlich auf die folgende allgemeinere zurück:

„Wenn die Beziehung eines Productes zweier Factoren, einer Grösse mit einer Zahl, des Multiplicands mit dem Multiplicator, — mit welchem einfachsten Falle die Lehre vom Multipliciren *anheben muss* — *negativ* sein soll, und Gleichnamigkeit oder Gleichwerthigkeit der Beziehungen beider Factoren unnachsichtlich bedungen wird; welche Beziehung hat man jedem der zwei Factoren beizulegen?"

Und hierauf wird zur *Antwort* gegeben:

„Keine declarative, directe, sondern eine aus- oder abweichende Beziehung, und zwar eine elusive, transversive."

Mithin folgt hieraus, so wie auch schon aus §. 29 und 30, umgekehrt:

Die Beziehung des Productes zweier gleichnamig — in derselben Weise, beide positiv oder negativ — *elusiv beziehlichen Factoren* (eines elusiv beziehlichen Multiplicands mit einem eben so beziehlichen Multiplicator) *ist negativ*;

also $\downarrow a \cdot \downarrow b = - ab$, $\quad + \downarrow a \cdot + \downarrow b = - ab$, $\quad - \downarrow a \cdot - \downarrow b = - ab$.

Um uns die *Gründe für diesen einfachsten Fall noch besonders* vorzulegen, erinnern wir uns, dass die Beziehung des Multiplicators vorschreibt, wie man von der Beziehung des Multiplicands auf die des Productes zu übergehen oder abzulenken hat; nämlich dass man, wie man von der positiven Beziehung auf die des Multiplicators übergeht, gerade so auch von der Beziehung des Multiplicands auf die zu bestimmende des Productes zu übergehen hat. Hier nun sind Multiplicator und Multiplicand gleichnamig elusiv beziehlich, und wenn man von der positiven oder Grundbeziehung auf die elusive Beziehung des Multiplicands, und von dieser ganz in derselben Weise noch weiter geht — weil solches Weiterschreiten der eben so elusiv beziehliche Factor vorschreibt, — kommt man, gemäss dem Begriff der elusiven Beziehungen, §. 24, 5., auf die negative Beziehung. Mithin ist die Beziehung des Productes zweier gleichnamig elusiv beziehlichen Factoren negativ.

Damit wir diesen äusserst wichtigen Satz noch *durch ein ganz besonderes Beispiel erläutern*; sei die Grundbeziehung das Vorwärts; ferner sei die positive elusive Beziehung das Rechts, also die negative elusive Beziehung das Links; und seien elusiv betrachtete 10 Schritt 4 mal eben so elusiv zurückzulegen, oder das Product ↓10 Schritt × ↓4 zu bestimmen. Da nun wird es heissen: Man wende oder schwenke sich auf seinem Standorte aus der vorwärtigen — positiven — Stellung, die man inne hat, vorerst, wenn die elusive Beziehung das $\frac{\text{Rechts}}{\text{Links}}$ ist, mit einer $\frac{\text{Rechtswendung}}{\text{Linkswendung}}$ nach $\frac{\text{rechts}}{\text{links}}$; dann wegen der eben so elusiven Beziehung des Multiplicators 4, mit einer zweiten $\frac{\text{Rechtswendung}}{\text{Linkswendung}}$ abermals $\frac{\text{rechts}}{\text{links}}$. Auf diese Weise wird man mittels dieser zweimaligen $\frac{\text{Rechtswendung}}{\text{Linkswendung}}$ sich ganz umgekehrt haben, nach rückwärts schauen, also in die negative Stellung gekommen sein. Nun erst hat man nach dieser negativen — rückwärtigen — Richtung hin 4mal nach einander 10 Schritt, also in Allem 40 Schritt zurückzulegen, so dass das Product ↓10 Schritt × ↓4 = — 40 Schritt erfolgt, nämlich 40 Schritt vom Standorte aus nicht vorwärts, wohin man ursprünglich schaute, sondern entgegengesetzt, rückwärts.

§. 45.

Ausreichen zweier Paare gekreuzter Beziehungen.

Bei dem einfachsten und eigentlichen Multipliciren einer Grösse mit einer Zahl *reichen* demnach, *um dem Producte alle möglichen directen und transversiven Beziehungen zu verschaffen, zwei gekreuzte Paare entgegengesetzter Beziehungen* — ein directes Paar mit einem transversen — *völlig aus*.

Denn 1. können die *Beziehungen beider Factoren gleichnamig* sein; dann ist die *Beziehung des Productes direct*, und zwar

a) wenn die *Factoren direct* bezogen sind,
ist das *Product positiv* beziehlich, $+a \cdot + b = + ab$
$- a \cdot - b = + ab$;

b) wenn die *Factoren transvers* bezogen sind,
ist das *Product negativ* beziehlich, $+ \downarrow a \cdot + \downarrow b = - ab$
$- \downarrow a \cdot - \downarrow b = - ab$.

2. Die *Beziehungen der Factoren* können *entgegengesetzt* sein, dann ist die *Beziehung des Productes* auch noch *direct*, und zwar:

a) wenn die *Factoren direct* bezogen sind,
ist das *Product negativ* beziehlich, $+ a \cdot - b = - ab$
$- a \cdot + b = - ab$;

b) wenn die *Factoren transvers* bezogen sind,
ist das *Product positiv* beziehlich, $+\downarrow a \cdot -\downarrow b = + ab$
$-\downarrow a \cdot + \downarrow b = + ab.$

3. Sind die *Beziehungen der Factoren gekreuzt*, so ist die *Beziehung des Productes transvers*, als:

$$+ a \cdot + \downarrow b = + \downarrow ab \qquad + \downarrow a \cdot + b = + \downarrow ab$$
$$+ a \cdot - \downarrow b = - \downarrow ab \qquad + \downarrow a \cdot - b = - \downarrow ab$$
$$- a \cdot + \downarrow b = - \downarrow ab \qquad - \downarrow a \cdot + b = - \downarrow ab$$
$$- a \cdot - \downarrow b = + \downarrow ab \qquad - \downarrow a \cdot - b = + \downarrow ab.$$

Andere Zusammenstellungen sind nicht denkbar. Folglich erhält das Product jedesmal eine der vier, paarweise theils entgegengesetzten theils gekreuzten Beziehungen, $+$, $-$, $+\downarrow$, $-\downarrow$, welche die Beziehungen der 4ten Wurzel aus einer positiv beziehlichen Zahl sind, sobald die Factoren in zwei solchen Beziehungen auftreten. (§. 42.)

In diesem Zureichen der zwei Paar gekreuzten Beziehungen bei der einfachsten und eigentlichen Multiplication — einer Grösse mit einer Zahl — und in dem Umstande, dass derlei Multipliciren bei jedem zusammengesetzten von mehr als zwei Factoren, so wie bei dem Potenziren nur wiederholt in Anwendung kommt, dürfte sattsam begründet sein, warum auf die vier gekreuzten Beziehungen alle anderen ablenkenden ganz natürlich zurückkommen, wie in der Folge ersichtlich gemacht werden wird. Desswegen soll hier nur das Rechnen mit gekreuzt beziehlichen Grössen ausführlich erörtert werden, weil jedes mit anders beziehlichen Grössen entweder darauf zurückgeführt oder ihm leicht nachgebildet werden kann.

§. 46.

Beziehungen der Producte mehrerer gekreuzt beziehlicher Factoren.

Kommen in einem Producte wie viel immer gekreuzt beziehliche Factoren vor; so kann man, zufolge der früher für (einfache) zweifactorige Producte aufgestellten Sätze, *des Productes Beziehung leicht nach folgendem Verfahren bestimmen:*

1. Man betrachtet die vor den Transversivzeichen $\downarrow$ stehenden *Positiv- und Negativzeichen* $+$ und $-$ von ihnen *getrennt*, eben so wie die schon ohnehin isolirt vorkommenden.

2. Alle *Positivzeichen* $+$ übergeht man gänzlich, oder wirft sie weg, gleichsam als nichts bestimmend.

3. Die *Transversivzeichen* $\downarrow$ zieht man paarweise (je zwei und zwei) in ein Negativzeichen $-$ zusammen, und notirt nur ein etwa allein noch übrig bleibendes $\downarrow$ unmittelbar vor dem Producte.

4. Die so erhaltenen und die schon ursprünglich vorhandenen *Negativzeichen* $-$ wirft man paarweise weg, weil ein solches Paar durch ein $+$ zu ersetzen wäre, das weg-

zuwerfen ist; nur ein etwa allein übrig bleibendes — wird dem Producte vorgeschrieben, entweder unmittelbar vor selbes oder vor das ihm schon vorgesetzte $\downarrow$.

5. Mithin kann man auch sogleich von vornherein, so oft es angeht, *vier* $\downarrow$ oder *zwei* —, als durch ein $+$ ersetzbar, auslassen.

Z. B. In dem Producte $+\downarrow a\cdot - \downarrow b\cdot + \downarrow a\cdot - d\cdot + e$ ziehen sich zwei $\downarrow$ in ein — zusammen, und das dritte $\downarrow$ bleibt übrig; von den nunmehrigen drei — fallen zwei weg, und das dritte bleibt zurück; folglich wird dem Producte $-\downarrow$ vorgesetzt, und dasselbe ist vollständig $-\downarrow abcde$.

Anmerkung. Man zählt hier gleichsam jedes $\downarrow$ für $\frac{1}{2}$, jedes — für 1, jedes $+$ für 0 oder 2, nämlich — als eine ganze, $+$ als keine oder als eine doppelte, und $\downarrow$ als eine halbe Negation, und wirft von der Summe, so oft es angeht, 2 weg, wonach der Überrest die Beziehung des Productes markirt, nämlich:

wenn der Rest $0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}$,

ist des Productes Beziehung $+, \downarrow, -, -\downarrow$. (Vergl. §. 28; 7 u. 8).

§. 47.

Beziehungen der Potenzen transversiv beziehlicher Zahlen.

Insofern Potenzen mit ganzen absoluten Exponenten Producte so vieler mit dem Potentiand identischer Factoren sind, als der Exponent zählt, lässt sich das eben beschriebene Verfahren auch auf Potenzen anwenden, deren Potentiand transversiv beziehlich ist, indem man jedes Zeichen $+$, —, $\downarrow$ des Potentiands als so vielmal vorhanden ansieht, als der Exponent zählt. Richtet man daher jene Vorschrift für diesen besondern Fall eigens her, so wird sie folgende:

1. Das $+$ des Potentiands lässt man ganz unbeachtet.

2. Von den Transversivzeichen $\downarrow$ wird nur dann eines zurückbehalten, wenn der Exponent ungerad ist; die Hälfte des geraden oder des um 1 verringerten ungeraden Exponenten zählt die Paare der $\downarrow$ oder der aus solchen Paaren entstehenden Negativzeichen —.

3. Die so erhaltenen und die ursprünglich vorhandenen (—) werden paarweise weggeworfen, und bloss ein etwa allein übrig bleibendes Negativzeichen (—) wird beibehalten.

4. Auch kann man vor aller Untersuchung vom Exponenten, so oft es angeht, 4 wegwerfen, und nur den Rest, der 0, 1, 2, 3 sein kann, anstatt des Exponenten in Rechnung nehmen. Man findet dafür

$$(\pm\downarrow)^0 = + \,,\ (\pm\downarrow)^1 = \pm\downarrow \,,\ (\pm\downarrow)^2 = - \,,\ (\pm\downarrow)^3 = \mp\downarrow$$

Z. B. So ist $(\pm\downarrow a)^{4n} = a^{4n}$, $(\pm\downarrow a)^{4n+1} = \pm\downarrow a^{4n+1}$

$$(\pm\downarrow a)^{4n+2} = -a^{4n+2} \,,\ (\pm\downarrow a)^{4n+3} = \mp\downarrow a^{4n+3}.$$

Insbesondere ist $(\pm\downarrow 1)^{4n} = (\pm\downarrow 1)^4 = +1$, $(\pm\downarrow 1)^{4n+1} = (\pm\downarrow 1)^1 = \pm\downarrow 1$,

$(\pm\downarrow 1)^{4n+2} = (\pm\downarrow 1)^2 = -1$, $(\pm\downarrow 1)^{4n+3} = (\pm\downarrow 1)^3 = \pm\downarrow 1$,

Anmerkung. Wenn man, wie vorher (§. 46, Anm.) gesagt, — als 1, $\downarrow$ als $\frac{1}{2}$, $+$ als 0 im Potentiand zählt, so wird man die Zahl, welche des Potentiands Beziehung markirt, mit dem Exponenten multipliciren, und vom Producte, so oft es angeht, 2 wegwerfen, wo dann der Rest die Beziehung der Potenz markiren wird.

§. 48.

Beziehung der Quotienten gekreuzt beziehlicher Grössen.

Da bei dem Theilen einer Grösse durch eine andere das Product aus Theiler und Quotient in Grösse und Beziehung dem Dividende gleichen muss, so darf man für die Bestimmung des Beziehungszeichens des Quotienten, im Dividend und Theiler einerlei Beziehungszeichen zusetzen oder weglassen, bis endlich das des Theilers $+$ wird, wonach das Beziehungszeichen des Dividends zu dem zu suchenden des Quotienten gemacht wird.

Z. B. Wenn $a : b = c$ ist, findet man

$$\pm \downarrow a : + b = \pm \downarrow c \qquad + a : + \downarrow b = \mp \downarrow c \qquad \pm \downarrow a : + \downarrow b = \pm\, c$$
$$\pm\, a \downarrow : - b = \mp \downarrow c \qquad - a : \pm \downarrow b = \pm \downarrow c \qquad \pm \downarrow a : - \downarrow b = \mp\, c.$$

Insbesondere ist $1 : \downarrow 1 = \frac{1}{\downarrow 1} = - \downarrow 1,$

d. h. Das Umgekehrte der transvers beziehlichen Eins ist auch ihr Entgegengesetztbeziehliches.

§. 49.

Aggregation gekreuzt beziehlicher gleichartiger Grössen.

Gleichartige Grössen, von denen jede in einer der zwei Paar gekreuzten Beziehungen *derselben Art* vorkommen, können in Rücksicht dieser beiderlei Gleichartigkeiten (Gemeinschaftlichkeiten gewisser Merkmale) zu einander gefügt, zusammengefasst, *addirt*, also auch wieder umgekehrt von einander getrennt, abgezogen, *subtrahirt*, mithin überhaupt *aggregirt*, *algebraisch addirt*, mit einander in An- oder Aufrechnung gebracht werden.

1. *Beispiel*. Stellt $\pm\, A$ einen geraden Weg von einem gewissen Ausgangspunkte vor- oder rückwärts, und $\pm \downarrow B$ einen am Ende dieses Weges sich anschliessenden zweiten Weg nach rechts oder links, lothrecht auf- oder abwärts vor; so lassen sich beide Wege als in einen (winkelrecht) gebrochenen Weg vereint ansehen, den man durch das Aggregat $(\pm A) + (\pm \downarrow B)$ oder kürzer durch $\pm A \pm \downarrow B$ andeutet. In gleicher Weise können mehre solche Wege, wie $\pm\, A$, $\pm \downarrow B$. $\pm \downarrow C$, $\pm\, D$, $\pm\, E$, $\pm \downarrow F$ sich an einander anschliessen und zusammen einen gebrochenen Weg ausmachen, den man durch das Aggregat $\pm\, A \pm \downarrow B \pm \downarrow C \pm\, D \pm\, E \pm \downarrow F$ darstellt.

2. *Beispiel*. Ist $\pm\, A$ ein bereits liquidirtes entweder im Besitze befindliches oder aber schuldiges Geld eines Menschen, dagegen $\pm \downarrow B$ ein noch im Process schwebendes,

entweder an ihn heimfallendes oder gegentheilig von ihm zu zahlendes, so kann sein Gesammtbesitz durch $\pm A \pm \downarrow B$ vorgestellt werden. Eben so, wenn von den Geldposten $\pm A$, $\pm \downarrow B$, $\pm \downarrow C$, $\pm D$, $\pm E$, $\pm \downarrow F$, Ähnliches gelten würde, könnte sein Gesammtbesitz durch das Aggregat $\pm A \pm \downarrow B \pm C \pm D \pm E \pm \downarrow F$ ausgedrückt werden.

3. *Beispiel.* Nimmt man in einer Zusammenstellung mehrerer wagrecht (nach der Schriftzeile) geschriebener Reihen von Zeichen unterschiedlicher Gegenstände eine Reihe als Hauptreihe, und in jedweder ein Glied als Ausgangsglied oder nulltes an, und eine gewisse Richtung des Zählens der Glieder in allen Reihen oder Zeilen — vorwärts oder rückwärts — als die positive, folglich die entgegengesetzte als die negative an; stehen ferner die nullten, also auch alle gleichvielten Glieder durchweg gerade unter einander, und sieht man das Aufwärts und Abwärts im Zählen solcher gleichvielter Glieder, als transversive Beziehung, das eine als die positive, also das andere als die negative transversive Beziehung an: so wird man, um zu einem Gliede einer Nebenreihe zu gelangen, vorerst wagrecht in der Hauptreihe vor- oder rückwärts, positiv oder negativ, bis zu dem mit der Nummer $\pm n$ belegten Gliede zählen und von da an in der Reihe aller solcher n^{ter} Glieder noch auf- oder abwärts, positiv oder negativ transvers, bis zur Nummer $\pm \downarrow p$ zählen. Dann signalisirt oder numerirt das Aggregat $\pm n \pm \downarrow p$, mit völliger Bestimmtheit, das fragliche Glied, oder es ist der algemeinste Stellenzeiger jedes Gliedes in dieser Gruppe von Reihen. Auf gleiche Weise kann aber auch um die Nummern $\pm \downarrow q$, $\pm r$, $\pm \downarrow s$, u. s. f. weiter gezählt werden, wonach das Glied, bei dem man stehen bleibt, den Stellenzeiger $\pm n \pm \downarrow p \pm \downarrow q \pm r \pm \downarrow s$ erhalten wird.

§. 50.

Reduction von Aggregaten gekreuzt bezogener Grössen.

Bei solchem Aggregiren gekreuzt beziehlicher Grössen, so wie auch ihrer Aggregate, darf jedoch nicht übersehen werden, dass, obwohl die zu aggregirenden Grössen in Bezug auf gewisse Merkmale gleichartig sind, und desswegen addirt und subtrahirt werden können, sie doch stets insofern als ungleichartig aufgeführt und behandelt werden müssen, als ihre Beziehungen durch die Kreuzung wesentlich von einander verschieden, nämlich die Beziehungen einiger Grössen direct, jene anderer Grössen aber transversiv sind. Darum müssen jederzeit, obschon sie insgesammt aggregirt werden können, einerseits alle direct bezogenen in eine gleichfalls direct beziehliche, und andererseits alle transversiv bezogenen auch für sich in eine ebenfalls transversiv beziehliche Grösse aggregativ zusammengezogen werden; niemals aber kann eine direct beziehliche Grösse mit einer transversiv beziehlichen in eine einzige bloss direct oder bloss transvers beziehliche Grösse zusammengezogen werden.

Mithin reducirt sich jeder solche Inbegriff gekreuzt beziehlicher gleichartiger Grös-

sen auf ein zweigliedriges, aus einer direct beziehlichen und aus einer transvers beziehlichen Grösse bestehendes Aggregat, und nimmt also die allgemeine Form $A+\downarrow B$ an.

Z. B. $7+\downarrow 3-5-\downarrow 8+\downarrow 15+19 = 7-5+19+\downarrow(3-8+15) = 21+\downarrow 10.$

$(a+\downarrow\alpha)-(b+\downarrow\beta) = (a-b)+\downarrow(\alpha-\beta).$

Ein solches Aggregat oder Binom $A+\downarrow B$, aus einer direct und aus einer transversiv beziehlichen Grösse bestehend, pflegt man nach *Gauss* und *Cauchy* eine *complexe Grösse* *) oder Zahl, und die aggregirten Grössen A und $\downarrow B$ die *Glieder*, *Aggreganden*, Antheile derselben zu nennen. Im Folgenden wird sich zeigen, dass jede wie immer abweichend beziehliche Grösse als complexe Grösse sich darstellen lässt, folglich die complexe Grösse die allgemeinste Form aller wie immer ablenkend beziehlichen Grössen ist.

Anmerkung. Aber nicht bloss gekreuzt beziehliche gleichartige Grössen können aggregirt werden, sondern auch gleichartige Grössen, deren Beziehungen wie immer von der Grundbeziehung ablenken; nur lassen sich auch da keine zwei Aggregande in einen zusammenziehen, deren Beziehungen nicht entweder gleich oder entgegengesetzt sind, oder vorher als solche dargestellt worden sind.

Z. B. $8+(\sqrt[3]{-})7-(\sqrt[3]{-})^2 5-6+(\sqrt[3]{-})^2 8 = 8+(\sqrt[3]{-})7+(\sqrt[3]{-})5-6-(\sqrt[3]{-})8$

$= (8-6)+(\sqrt[3]{-})(7+5-8) = 2+(\sqrt[3]{-})4.$

$7-(\sqrt[4]{+})5+(\sqrt{-})6-(\sqrt[4]{+})^2 1+(\sqrt[3]{-})3 = 7-(\sqrt[2]{-})5+(\sqrt{-})6-(-)1+(\sqrt[3]{-})3$

$= (7+1)+(\sqrt{-})(6-5)+(\sqrt[3]{-})3 = 8+(\sqrt{-})1+(\sqrt[3]{-})3.$

Sollte man dereinst veranlasst sein, solche Aggregate näher zu erforschen, wie *Gauss* (a. a. O. *art.* 31, *nota*) auf das, der Theorie der cubischen Reste zu Grunde zu legende Aggregat $a+(\sqrt[3]{-})b$ hinweist; so würde man sich gewiss genöthigt sehen, obige Benennung „complex" mit einer expressiveren zu vertauschen.

§. 51.

Folgerungen.

Darin, dass zwei gekreuzt beziehliche Grössen nie in eine einzige — direct oder transversiv beziehliche — zusammengezogen werden können, liegt der Grund folgender *Haupteigenschaften complexer Grössen.*

1. So lange in einem Aggregate gekreuzt beziehlicher Grössen weder das Aggregat der direct beziehlichen noch das der transvers beziehlichen Aggregande für sich verschwindet, zu Null wird, sondern in der That einen gewissen Betrag ausmacht, ist eine solche complexe Grösse *wahrhaft zweigliedrig*, eines ihrer Glieder direct, das andere transversiv

*) Ich möchte es ein *Bifarial* oder eine *Bifarielle* (von *bis* und *fari*, zweierlei besagen, oder von *bifariam*, nach zwei Seiten hin) nennen, vornehmlich weil hiernach auch *Trifarial*, . . . und *Polyfarial* leicht zu verstehen wären.

Auf diese Weise findet man den Quotienten

$$(a+\downarrow b):(\alpha+\downarrow\beta)=\frac{\frac{a}{\beta}+\frac{b}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}}+\downarrow\frac{\frac{b}{\beta}-\frac{a}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}},$$

Beispiele:

$$(a+\downarrow b)^2=a^2-b^2+\downarrow 2ab$$

$$(a+\downarrow b)^3=a^3-3ab^2+\downarrow(3a^2b-b^3).$$

Aus dem letzten Lehrsatze folgt sonach wieder

5. Auch das Umgekehrte der Potenzirung, die *Radication* (Wurzelziehung aus) einer complexen Zahl nach einem absoluten ganzen Wurzelexponenten gibt wieder eine complexe Zahl.

Anmerkung. Es lässt sich leicht erkennen, dass die hier alufgestelten Sätze auch für Aggregate von der Form $a+(\sqrt[3]{-})b$ gelten.

§. 53.

Gepaarte complexe Grössen.

Häufig kommen in den Rechnungen Paare complexer Grössen vor, die sich nur darin von einander unterscheiden, dass ihre transversiv beziehlichen Glieder entgegengesetzt bezogen oder aggregirt sind; wie:

$a+\downarrow b$ und $a-\downarrow b$, oder $-a+\downarrow b$ und $-a-\downarrow b$.

Solche zwei complexe Grössen, die demnach die Summe und der Unterschied einer direct und einer transversiv beziehlichen Grösse sind, nennt man *gepaart*, *conjugirt*.

Von *gepaarten complexen Zahlen* findet man leicht folgende *zwei bemerkenswerthe* Rechnungsergebnisse:

$$(a+\downarrow b)(a-\downarrow b)=a^2+b^2$$

$$\frac{a\pm\downarrow b}{a\mp\downarrow b}=\frac{(a\pm\downarrow b)(a\pm\downarrow b)}{(a\mp\downarrow b)(a\pm\downarrow b)}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\pm\downarrow\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Viertes Hauptstück.

Das Potenziren nach transversiv beziehlichen Exponenten.

§. 54.

Veranlassung zu solchem Potenziren.

Die Lehre vom Potenziren erweist bekanntlich folgenden höchst wichtigen *Satz:* Eine Zahl wird nach mehreren Exponenten nach einander potenzirt, wenn man sie nach dem Producte der Exponenten potenzirt.

Hieraus *folgert* sie sogleich den umgekehrten Satz:

Eine Zahl wird nach dem Producte mehrerer Zahlen potenzirt, wenn man sie nach den Factoren nach einander potenzirt.

Da zufolge derselben Lehre die Exponenten auch negativ beziehlich sein können, so dürfen auch die Factoren des als Exponent fungirenden Productes nicht bloss in positiver, sondern auch in negativer Beziehung zu auf einander folgenden Exponenten gewählt werden; nur muss, wenn die Beziehung des Productes $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ ist, die Anzahl der negativ beziehlichen Factoren $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gerad}}{\text{ungerad}}$ sein.

Gesetzt nun, man fordere

1. Einstimmigkeit oder Gleichnamigkeit *der Beziehungen aller Factoren* des aufzulösenden Exponenten, und

2. man schreibe zugleich die *Menge dieser Factoren* oder nach einander folgenden Exponenten vor.

Dann kann, vermöge §. 20 und 41, diesen Forderungen *ohne Anstand entsprochen* werden,

1) wenn die *Beziehung* jenes aufzulösenden Exponenten *positiv* und die vorgeschriebene *Anzahl* seiner Factoren *welche immer* ist;

2) wenn die *Beziehung* des aufzulösenden Exponenten *negativ* und die vorgezeichnete *Anzahl* seiner Factoren *ungerad ist. Allein,* so oft

3) die *Beziehung* des aufzulösenden Exponenten *negativ* und die vorgezeichnete *Anzahl* seiner Factoren *gerad* ist, reichen die beiden directen Beziehungen für die aufzustellenden gleichnamig beziehlichen Factoren, gemäss §. 41, 3., nicht mehr aus, sondern man muss zu den aus- oder *abweichenden* Beziehungen seine Zuflucht nehmen.

Der einfachste Fall, der hier in Frage gestellt werden kann, ist offenbar der, wo der negativ beziehliche Exponent in *zwei* gleichnamig beziehliche Factoren oder stellvertretende successive Exponenten aufgelöst werden soll. Da sind beide diese Factoren in gleichnamiger *transversiver Beziehung* zu nehmen (§. 43).

Auf diesem Wege nun gelangt die Algebra nothwendig zu einem Potenziren nach transversiv beziehlichen Exponenten.

§. 55.

Zulässigkeit desselben.

Sobald man die Nützlichkeit und Nothwendigkeit anerkannt hat, in der Algebra nicht bloss die entgegengesetzten, sondern auch die mannigfaltig abweichenden, zum Theil paarweis entgegengesetzten, Beziehungen der Grössen fortwährend und überall nebst ihrer Grösse zu berücksichtigen, kann über die Zulässigkeit des Potenzirens nach anders als

direct beziehlichen, nämlich nach überhaupt abweichend beziehlichen, insbesondere nach transversiv beziehlichen Exponenten keine weitere Bedenklichkeit Stand halten; zumal der Anlass zu solchem Rechnen ganz natürlich sich darbietet und sein Grundbegriff, so wie er in dem eben Gesagten aufgestellt wurde, keinerlei Widerspruch in sich selbst enthält.

Freilich erhellet aus diesem Grundbegriffe nicht sogleich, wie man ein derlei Potenziren eines gegebenen Potentiands nach einem angewiesenen Exponenten ausführen könne; allein dessen ungeachtet dürfen wir mit demselben Rechte dergleichen Potenzen, deren Bestimmbarkeit und Bestimmungsweise uns vor der Hand noch unbekannt ist, und nur in vorhinein zugestanden wird, allen allgemeinen Rechnungsgesetzen unterwerfen, wie man diess sonst auch mit den Quotienten und Wurzeln in der, ihrer wirklichen oft nur annähernden Berechnungsweise voranzuschickenden, Lehre von ihren allgemeinen Eigenschaften zu thun genöthigt ist.

§. 56.

Grundlage zum Potenziren nach transversiv beziehlichen Exponenten.

Die Frage um das Verfahren des Potenzirens einer Zahl nach transversiv beziehlichen Exponenten könnte sogleich allgemeiner aufgefasst werden, indem man den Exponenten complex voraussetzen möchte. Allein da die Potenz $h^{m+\downarrow n}$ als Product der Potenzen h^m und $h^{\downarrow n}$ dargetsellt werden kann, von denen die erstere keinem Anstande unterliegt: so wird es schon vollkommen genügen, wenn wir hier nur die letztere allein bedenkliche Potenz $h^{\downarrow n}$, oder dafür lieber die Potenz $h^{((-))^{\frac{1}{2}}n}$ genauer erforschen, indem wir die doppeldeutige transversive Beziehung $((-))^{\frac{1}{2}}$ des Exponenten ausdrücklich hervorheben.

Wie nun auch immer eine solche Potenz $h^{((-))^{\frac{1}{2}}n}$ ausgerechnet werden möge, so lässst sich doch jedenfalls mit Gewissheit annehmen, dass sie auf ein vor der Hand unbestimmt viel Glieder enthaltendes Aggregat zurückgeleitet werden könne, deren Beträge aus den, die fragliche Potenz allein bestimmenden, Zahlen h und n berechnet werden und u, v, w, x, ... sein mögen, und von deren Beziehungen nur die des ersten Gliedes u direct, jene $((\varphi))$, $((\chi))$, $((\psi))$, ... der übrigen Glieder v, w, x, ... aber durchgängig abweichend und zwar noch dermassen wesentlich unter sich verschieden sein sollen, dass keine zwei etwa bloss durch ihren Gegensatz sich unterscheiden, weil solche zwei Glieder ohnehin schon früher in eines zusammengezogen worden wären. Auf solche Weise setzt man

$$h^{((-))^{\frac{1}{2}}n} = u + ((\varphi))v + ((\chi))w + ((\psi))x + \dots$$

Führt man hier für die doppelsinnige Beziehung $((-))^{\frac{1}{2}}$ ihre beiden einzelnen Bedeutungen $\sqrt{-}$ und $-\sqrt{-}$ oder $\downarrow$ und $-\downarrow$ ein: so sollen die Beziehungen $((\varphi))$, $((\chi))$, $((\psi))$, ... in φ, χ, ψ, ... und in φ', χ', ψ', ... übergehen. Dabei müssen die Zahlen u, v, w. x, ..., so wie die Zahlen h und n, aus denen sie berechnet werden, ungeändert dieselben bleiben; mithin erhält man

$$h^{\downarrow n} = u + \varphi v + \chi w + \psi x + \ldots.$$
$$h^{-\downarrow n} = u + \varphi' v + \chi' w + \psi' x + \ldots.$$

Nun sind aber, den Grundbegriffen des Potenzirens zufolge, die Potenz $h^{\downarrow n}$ und $h^{-\downarrow n}$, wegen des Gegensatzes der Beziehungen ihres gemeinsamen Exponenten n, Umgekehrte von einander, ihr Product also 1. Oder als Grundeigenschaft der Potenzen muss stets *die* anerkannt werden, dass das Product von Potenzen derselben Zahl die Potenz der nämlichen Zahl nach der Summe der Exponenten ist; mithin ist $h^{\downarrow n}.\ h^{-\downarrow n} = h^{\downarrow n - \downarrow n} = h^0$ und diess $= 1$. Multiplicirt man daher obige zwei Gleichheiten mit einander, so ist

$$\begin{aligned}1 = u^2 &+ \varphi uv + \varphi' uv + \varphi\varphi' v^2 \\ &+ \chi uw + \chi' uw + \varphi\chi' vw + \varphi'\chi vw + \chi\chi' w^2 \\ &+ \psi ux + \psi' ux + \varphi'\psi vx + \varphi\psi vx + \chi\psi' wx + \chi'\psi wx + \psi\psi' x^2 \\ &+ \ldots\ldots\end{aligned}$$

Von den Beziehungen $\varphi, \chi, \psi, \ldots; \varphi', \chi', \psi', \ldots$ ist keine direct. Befänden sich nun auch unter den Beziehungen $\varphi\varphi', \chi\chi', \psi\psi', \ldots.$ der zweiten Potenzen $v^2, w^2, x^2, \ldots.$ keine directen; so müsste (gemäss §. 51, 5.) $u^2 = 1$, $u = \pm 1$, $v = 0$, $w = 0$, $x = 0, \ldots$ folglich $h^{\downarrow n} = h^{-\downarrow n} = \pm 1$ sein, was widersinnig ist. Dasselbe müsste eintreten, wenn weder die Beziehungen φ und φ' von uv, noch die χ und χ' von uw noch die ψ und ψ' von ux u. s. f. einander entgegengesetzt wären, folglich gewiss eines dieser Producte stehen bliebe. Mithin gibt es unter den Gliedern $v, w, x, \ldots.$ nothwendig wenigstens *Eines*..., sei diess v..., dessen Beziehungen φ und φ' einander entgegengesetzt sind, und wo die Beziehung $\varphi\varphi'$ direct ist, so dass $\varphi' = -\varphi$ und $\varphi\varphi' = -\varphi^2 = \pm$, daher $\varphi^2 = \mp$ ist. Nun kann aber φ^2 nicht $= +$ sein, weil sonst $\varphi = \sqrt{+} = (-, +)$ also direct nicht abweichend wäre, wie doch vorausgesetzt wurde; mithin ist $\varphi^2 = -$, $((\varphi)) = |\sqrt{-}$, und zwar soll diese Beziehung gerade die des Exponenten n selbst sein, weil das Gegentheil leicht durch Entgegensetzung der Beziehung des Ausdruckes v darauf zurückgeführt werden könnte. Auf diese Weise ist $\varphi = \downarrow$, $\varphi' = -\varphi = -\downarrow$, $\varphi\varphi' = -\varphi^2 = +$, $\varphi\varphi' v^2 = v^2$ und $\varphi uv + \varphi' uv = 0$.

Nunmehr *müssen aber alle noch weiter angenommenen Glieder $w, x, \ldots$ ohne Ausnahme verschwinden, also $w = 0$, $x = 0 \ldots.$ sein.*

Denn weil gemäss der Voraussetzung unter den Beziehungen $\varphi, \chi, \psi, \ldots,$ also auch unter ihren Verwandlungen $\varphi', \chi', \psi', \ldots.$ keine zwei gleich oder entgegengesetzt sein können; und weil die beiden Beziehungen φ und φ' die zwei entgegengesetzten transversiven $\downarrow$ und $-\downarrow$ sind: so kann von allen übrigen Beziehungen keine einzige mehr transversiv sein. Dann aber befindet sich unter den Beziehungen derjenigen Abtheilung der Theilproducte, $\chi uw + \chi' uw + \varphi\chi' vw + \varphi'\chi vw + \chi\chi' w^2$, welche das zunächst hinter den beiden Anfangsgliedern u und v folgende Glied w zum Factor haben, weder eine directe, noch eine der Beziehung eines von einem späteren Gliede herstammenden Theilproductes gleiche oder entgegengesetzte; folglich kann kein solches von w abstammendes Theilproduct mit einem nicht davon herrührenden zusammengezogen werden. Aber auch mit einander lassen sich diese Theilproducte nicht insgesammt in Eines zusammenziehen. Denn sind χ und χ' weder gleich noch

entgegengesetzt, so gibt es unter den Beziehungen dieser Theilproducte weder zwei gleiche noch zwei entgegengesetzte. Ist aber $\chi' = \chi$, so wird wegen $\varphi' = -\varphi$, $\varphi'\chi = -\varphi\chi$, also reducirt sich das obige Aggregat von Theilproducten auf $\chi 2uw + \chi^2 w^2$. Allein χ und χ^2 können einander weder gleich noch entgegengesetzt sein, weil sonst die Beziehung χ direct oder transversiv sein müsste, was sie nicht ist. Ist endlich $\chi' = -\chi$, so wird wegen $\varphi' = -\varphi$ sowohl $\varphi\chi' = -\varphi\chi$ als auch $\varphi'\chi = -\varphi\chi$; daher reducirt sich jenes Aggregat auf $-\varphi\chi 2vw - \chi^2 w^2$. Allein weil φ transversiv, χ es aber nicht ist, so können $\varphi\chi$ und χ^2 weder gleich noch entgegengesetzt ausfallen. — Jedenfalls müssen demnach wenigstens zwei, keiner weiteren Zusammenziehung fähige den Factor w enthaltende Producte, aus den dreien, uw, vw, w^2, und darunter immer das letzte einzeln vermöge §. 51, 5. verschwinden; folglich muss unumgänglich dieser Factor $w = 0$ sein. Mithin verschwindet jedesmal das zunächst auf die beiden Anfangsglieder u und v folgen sollende Glied; das heisst aber auch, diesen zwei Gliedern u und v folgt kein weiteres mehr.

Fassen wir die Ergebnisse dieser Untersuchung zusammen, so erkennen wir die Giltigkeit folgender *Hauptlehrsätze*:

1. Das Grundgesetz und die innerste Natur des Potenzirens der Zahlen nach transversiv beziehlichen Exponenten spricht sich durch die zwei unzertrennlichen Gleichungen aus:

(1) $$h^{((-))^{\frac{1}{2}}n} = u + ((-))^{\frac{1}{2}} v, \qquad u^2 + v^2 = 1,$$ (2)

in deren ersteren das *Glied* v mit dem Exponenten n einerlei transversive Beziehung $((-))^{\frac{1}{2}}$ hat; d. h.

Jede Potenz einer Zahl nach einem transversiv beziehlichen Exponenten gleicht einer complexen Zahl, deren transversiv beziehliches Glied mit dem Exponenten einerlei Beziehung hat, und in welcher die zweiten Potenzen ihrer Glieder sich zu 1 ergänzen.

2. *Die erstere Gleichung zerfällt* insbesondere, wegen des Doppelsinns der Beziehung $\sqrt{\ }$—, *in die zwei* zusammen genommen *ihr gleichgeltenden Gleichungen*:

(3) $$h^{\downarrow n} = u + \downarrow v$$
$$h^{-\downarrow n} = u - \downarrow v.$$

3. Die aus dem Potentiand h und dem Exponenten n zu berechnenden beiden Glieder u und v der die Potenz darstellenden complexen Zahl müssen der Forderung genügen, dass ihre zweiten Potenzen, welche nie anders als positiv beziehlich ausfallen können, sich zu 1 ergänzen. Nun lässt sich aber die Zahl 1 unbedingt in zwei positiv beziehliche Bestandtheile so zerfällen, dass der eine beliebig zwischen 0 und 1 wählbar ist und etwa von 0 gegen 1 stetig ansteigt, bis er endlich nothwendig einmal der zweiten Potenz des einen Gliedes, u, folglich der andere Bestandtheil der zweiten Potenz des anderen Gliedes, v, gleich wird. *Mithin ist es unzweifelhaft, dass jegliche Potenzirung nach transversiv beziehlichen Exponenten* **denkbar**, *wenn auch* — wie schon jetzt sich ahnen lässt und die Folge noch lehren wird — *schwierig* ***ausführbar*** *ist.*

§. 57.

Zurückleitung alles Potenzirens auf das einfachste so genannte natürliche Potenziren.

Zur Vereinfachung der uns vorschwebenden Forschungen erwägen wir vor Allem den *Fall, wo der Potentiand h eine absolute Zahl ist.* Dann gibt uns die Lehre von den natürlichen Logarithmen*) an die Hand, dass jegliches Potenziren einer absoluten Zahl auf ein Potenziren der bekannten Grundzahl 2.7182818.... der natürlichen Logarithmen, das man mit *Thibaut* das *natürliche Potenziren* nennen kann, sich zurückleiten lässt.

Bezeichnet man nämlich diese bestimmte, als Grundzahl der natürlichen Logarithmen, als *natürlicher Potentiand* dienende, Zahl nach einem herrschenden Gebrauche mit e, die natürlichen Logarithmen mit l, so ist der Potentiand $h = e^{lh}$, also die Potenz $h^{((-))^{\frac{1}{2}}n} = e^{((-))^{\frac{1}{2}}n.lh}$

Gibt nun $n.lh$ die Zahl α, so bleibt nur mehr die Bestimmung der natürlichen Potenz $e^{((-))^{\frac{1}{2}}\alpha}$ in Frage gestellt. Für sie geben obige Hauptlehrsätze und Grundgleichungen (§. 56) die generelle Gleichung

1) $$e^{((-))^{\frac{1}{2}}\alpha} = u + ((-))^{\frac{1}{2}}v,$$

oder das Paar ihr gleichgeltender specieller Gleichungen

(2) $$e^{\downarrow\alpha} = u + \downarrow v$$
$$e^{-\downarrow\alpha} = u - \downarrow v;$$

wo die beiden Glieder u und v wie vorher an die Bestimmungsgleichung (2) in § 56 gebunden sind, jedoch lediglich aus dem Exponenten α berechnet werden, weil e keine allgemeine, sondern die besondere Zahl 2.7182818..... vorstellt.

§. 58.

Benennungen und Bezeichnungen.

Die den Exponenten α enthaltenden Ausdrücke u und v heischen nun, gleich den Ergebnissen aller häufig wiederkehrenden, insbesondere der Grundrechnungen, von der Algebra eine eigenthümliche Benennung und Bezeichnung. Allein, weil die Algebra ihre allgemeinen Lehren, in ihrer allmälichen, zumeist durch das Bedürfniss bedingten Heranbildung, von den vielseitigen Anwendungen derselben auf die mannigfaltigen Zweige der besondern Mathematik, vornehmlich auf die, weit früher als die allgemeine Grössen- und Zahlenlehre — Algebra — ausgebildete Raumgrössenlehre — Geometrie — abstrahiren

*) Es ist mir, wie ich an einem anderen Orte zu zeigen Gelegenheit nehmen werde, geglückt, die Lehre von den natürlichen Logarithmen ganz elementär und völlig streng, ohne Anwendung der, zu vielen Umschweifen nöthigenden, convergenten unendlichen Reihen abzuhandeln.

musste, ist ihr die Geometrie in diesem Benennen und Bezeichnen zuvorgekommen, wie bei den Benennungen „Quadrat und Cubus" der zweiten und dritten Potenz.

Zugleich sind die von der Geometrie eingeführten Benennungen und Bezeichnungen durch ihren häufigen Gebrauch in alle Partien der höheren Zahlenlehre — Analysis — bereits dergestalt verflochten, dass man eine sehr grosse und doch an sich ganz nutzlose Verwirrung hervorrufen würde, wollte man diese durch Alter und Gebrauch geheiligten und fast in alle Sprachen ungeändert übergangenen lateinischen Namen und ihre als Zeichen dienenden Abkürzungen verwerfen und durch neue ersetzen, von denen in voraus wenigstens so viel ganz gewiss wäre, dass sie — möchten sie auch noch so ausdrucksvoll gewählt sein — eines ungetheilten Beifalls sich nicht erfreuen würden. Wir behalten daher diese üblichen Namen bei, um so mehr, als sie selbst im Latein nicht alle einen verständigen Sinn haben.

Wird demnach die Grundzahl e der natürlichen Logarithmen nach einer transversiv beziehlichen Zahl α potenzirt, so nennt man in der dieser Potenz $e^{\downarrow\alpha}$ gleichen und bloss aus jener Zahl α zu berechnenden complexen Zahl $u + \downarrow v$ den direct beziehlichen Antheil u, den *Cosinus*, und den eben so wie der Exponent transversiv beziehlichen Antheil v, den *Sinus* der als Exponent fungirenden Zahl α; dabei schreibt man jenen Antheil *cosinus* α oder abgekürzt $\cos.\ \alpha$, diesen *sinus* α oder abgekürzt $\sin.\ \alpha$.

Der *Cosinus* / *Sinus* *einer Zahl ist* demnach der direct / transversiv beziehliche Antheil derjenigen complex dargestellten natürlichen Potenz, deren transversiv beziehlicher Exponent jene Zahl ist; wofern Exponent und Sinus in einerlei Weise transversiv bezogen werden.

Weil man ferner jeden Rechnungsausdruck auch eine *Function* der in ihm enthaltenen Grössen zu nennen pflegt, und weil diese zwei Hilfszahlen, nebst noch einigen andern aus ihnen leicht abzuleitenden, besonders in der Lehre von den Winkeln verwendet werden; so nennt man alle solchen Hilfszahlen überhaupt *goniometrische* oder *Winkelfunctionen*, und insbesondere den Cosinus und Sinus die beiden *Stamm-* oder *Grundfunctionen*, die übrigen aber aus ihnen hergeleiteten die *Spross-* oder *Folgefunctionen*.

Führt man nun im vorigen §. für u und v die neuen Zeichen $\cos.\ \alpha$ und $\sin.\ \alpha$ ein, so erhält man

die Fundamentalgleichungen für die natürliche Potenzirung nach transversiv beziehlichen Exponenten:

(1) $$e^{\downarrow\alpha} = \cos.\alpha + \downarrow\sin.\alpha$$

(2) $$e^{-\downarrow\alpha} = \cos.\alpha - \downarrow\sin.\alpha, \quad \text{und}$$

(3) $$(\cos.\alpha)^2 + (\sin.\alpha)^2 = 1, \text{ oder einfacher } \cos.\alpha^2 + \sin.\alpha^2 = 1.$$

Anmerkung. 1. Bisher haben jene Mathematiker seit *Thibaut*, welche das in Rede stehende Potenziren in der Algebra oder niederen Analysis, ohne Voraussetzung geometrischer Kenntnisse, rein als Gegenstand der Zahlenlehre — was es doch eigentlich nur allein sein kann — behandelten, diese zwei Grundgleichungen dadurch hergeleitet, dass sie vor-

erst allgemein e^x in die bekannte nach den natürlich aufsteigenden Potenzen von x fortschreitende unendliche convergirende Reihe auflösten und nachher die in dieser Herleitung durchweg als reell vorausgesetzte Zahl x in die unmögliche oder höchstens imaginäre (fictive) $x\sqrt{-1}$ verwandelten. Da ein solcher Vorgang vor einer besonnenen Kritik nicht Stand zu halten vermag, so fand ich mich veranlasst, die hier durchgeführte Grundlegung zu dem besprochenen Potenziren auszudenken, der ich nebst tadelfreier Gründlichkeit auch noch den Vorzug zuschreiben zu dürfen glaube, dass sie, gleich der nun noch folgenden gedrängten Lehre solchen Potenzirens, als der unendlichen Reihen nirgends bedürfend, in elementären Lehrbüchern der Algebra, vor Abhandlung der höheren Gleichungen, die ihrer nicht zu entbehren vermag, Platz nehmen kann.

Anmerkung 2. Man erhält hier Anlass, dem Cosinus, als dem direct beziehlichen Antheile, den Vorrang vor dem Sinus, als dem transversiv beziehlichen Antheile der natürlichen Potenz nach transversiv beziehlichen Exponenten zu geben. Ein Gleiches tritt ein, wenn man, wie es in der Geometrie gewiss am natürlichsten geschieht, Cosinus und Sinus als Verhältnisse von Projectionen zu projicirten Geraden definirt.*) Überhaupt lässt sich in der Analysis, wie man vorzüglich aus *Cauchy's* analytischen Arbeiten entnehmen kann, ein wenn auch wenig erheblicher Vorrang des Cosinus vor dem Sinus nicht verkennen. Desswegen kann man auch den Cosinus die *primäre* oder *Haupt-*, den Sinus die *secundäre* oder *Neben-Stammfunction* nennen.

§. 59.

Nähere Untersuchung der goniometrischen Stammfunctionen.

I. Aus der Gleich. (3) $\quad cos.\,\alpha^2 + sin.\,\alpha^2 = 1$
des vor. §. ist ersichtlich, dass $cos.\,\alpha^2$ und $sin.\,\alpha^2$ zwischen 0 und 1,
also *cos.* α *und sin.* α *zwischen* -1 *und* $+1$ *enthalten* sind.

II. Setzt man in Gl. (1) §. 58, $\quad e^{\downarrow\alpha} = cos.\,\alpha + \downarrow sin.\,\alpha$
$-\alpha$ für α, so erhält man $\quad e^{-\downarrow\alpha} = cos.\,(-\alpha) + \downarrow sin.\,(-\alpha)$.
Man fand aber auch (ebenda) $\quad e^{-\downarrow\alpha} = cos.\,\alpha - \downarrow sin.\,\alpha$;
mithin gibt die Gleichstellung der Ausdrücke zufolge §. 51, 5.,

$$cos.\,(-\alpha) = cos.\,\alpha, \qquad sin.\,(-\alpha) = -sin.\,\alpha.$$

III. Nimmt man in der Gleichung $\quad e^{\downarrow\alpha} = cos.\,\alpha + \downarrow sin.\,\alpha$
die Zahl $\alpha = 0$, so ergibt sich $\quad 1 = cos.\,0 + \downarrow sin.\,0$,
mithin (§. 51, 5.) $\quad cos.\,0 = 1,\ Sin.\,0 = 0.$

Hieraus erhellet:

IV. Für $lim.\ \alpha = 0$ ist $lim.\ cos.\ \alpha = 1$, $lim.\ sin.\ \alpha = 0$, d. h. *bei unendlich abnehmender*

*) wie ich in Grunert's Archiv, Bd. 8, Heft 4, S. 372 gezeigt habe.

Zahl — mag ihre Beziehung positiv oder (vermöge II) negativ sein — *strebt ihr Cosinus der Zahl* 1, *der Sinus dagegen der* 0 *als ihren Grenzen zu;* und

V. *Die Zahl* α lässt sich *immer so klein denken*, dass ihres Cosinus Beziehung positiv ist.

VI. Aus Gl. (1) in §. 58 folgt leicht $\frac{e^{\downarrow\alpha}-1}{\downarrow\alpha}=\frac{sin.\,\alpha}{\alpha}+\downarrow\frac{1-cos.\,\alpha}{\alpha}$.

Es lässt sich aber (gemäss §. 57, Note) als bewiesen voraussetzen, dass allgemein $\frac{e^x-1}{x}$ für $x=0$ in 1 übergeht. Denn gilt dies einmal selbst nur für eine unbezogene Zahl x, so muss es auch schon für jede wie immer — direct oder transversiv oder sonst, wie abweichend — beziehliche Zahl x gelten; weil dann dieser Quotient ein Rechnungsausdruck sein muss, in welchem, wenn man für die allgemeine Zahl x die besondere 0 setzt, alle anderen Glieder ausser dem einen 1 verschwinden, und weil die Beziehung der Null, in Absicht auf Grösse der verschwindenden Glieder völlig gleichgiltig ist. Danach wird für $\alpha=0$ aus obiger Gleichung

$$1=\frac{sin.\,0}{0}+\downarrow\frac{1-cos.\,0}{0};$$

folglich ist $\frac{sin.\,0}{0}=1$, $\frac{1-cos.\,0}{0}=0$.

Oder für $\alpha=0$ ist $\frac{sin.\,\alpha}{\alpha}=1$, $\frac{1-cos.\,\alpha}{\alpha}=0$,

also auch für $lim.\,\alpha=0$ ist $lim.\,\frac{sin.\,\alpha}{\alpha}=1$, $lim.\,\frac{1-cos.\,\alpha}{\alpha}=0$.

Das Letztere bestätigt auch die folgende Verwandlung der Gleich. §. 58, (3). Sie gibt $sin.\,\alpha^2=1-cos\,\alpha^2=(1-cos.\,\alpha)(1+cos.\,\alpha)$

also $$\frac{1-cos.\,\alpha}{\alpha}=\frac{sin.\,\alpha}{\alpha}\cdot\frac{sin.\,\alpha}{1+cos.\,\alpha};$$

daher muss für $\alpha=0$ werden $\frac{1-cos.\,\alpha}{\alpha}=1\cdot\frac{0}{1+1}=0$.

Aus $lim.\,\frac{sin.\,\alpha}{\alpha}=1$ für $lim.\,\alpha=0$ ersehen wir nun den *höchst wichtigen Satz:*

Die Zahlen können immer so klein gedacht werden, dass ihre Sinus ihnen selbst hinreichend nahe gleich an Grösse und völlig gleich in der Beziehung sind;

Oder: *Den kleinsten Zahlen gleichen ihre Sinus in Grösse und Beziehung.*

§. 60.

Stammfunctionen der Zahlenbinome.

So wie §. 58 Gl. (1) $e^{\downarrow\alpha}=cos.\,\alpha+\downarrow sin.\,\alpha$,

ist auch, wenn man α in $\pm\beta$ übergehen lässt,

$$e^{\pm\downarrow\beta}=cos.\,\beta\pm\downarrow sin.\,\beta.$$

Multiplicirt man beide Gleichungen mit einander, so erfolgt

$$e^{\downarrow(\alpha\pm\beta)} = cos.\,\alpha\, cos.\,\beta \mp sin.\,\alpha\, sin.\,\beta + \downarrow(sin.\,\alpha\, cos.\,\beta \pm cos.\,\alpha\, sin.\,\beta).$$

Ersetzt man aber in der obigen Grundgleichung (1) §. 58 die Zahl α durch das Zahlenbinom $\alpha\pm\beta$, so verwandelt sie sich in

$$e^{\downarrow(\alpha\pm\beta)} = cos.\,(\alpha\pm\beta) + \downarrow sin.\,(\alpha\pm\beta);$$

daher, wenn man die beiden letzten Gleichungen an einander hält, findet man

(1) $$cos.\,(\alpha\pm\beta) = cos.\,\alpha\, cos.\,\beta \mp sin.\,\alpha\, sin.\,\beta$$

(2) $$sin.\,(\alpha\pm\beta) = sin.\,\alpha\, cos.\,\beta \pm cos.\,\alpha\, sin.\,\beta.$$

§. 61.

Stammfunctionen vielfacher Zahlen.

Ersetzt man eines Theils in der Grundgleichung (1) §. 58. die Zahl α durch das Product $m\alpha$, wo m ein beliebiger Multiplicator ist, und potenzirt man andern Theils diese Gleichung nach m (als Exponenten); so findet man für $e^{\downarrow m\alpha}$ zwei Ausdrücke, welche einander gleichgestellt

(1) $$cos.\,m\alpha + \downarrow sin.\,m\alpha = (cos.\,\alpha + \downarrow sin\,\alpha)^m$$

geben. Stellt man die letztere Potenz complex dar, so findet man sogleich Ausdrücke für $cos.\,m\alpha$ und $sin.\,m\alpha$.

Uns genügt hier, m eine absolute ganze Zahl sein zu lassen, wo wir erhalten

(2) $$cos.\,m\,\alpha = cos.\,\alpha^m - \binom{m}{2} cos.\,\alpha^{m-2}\, sin.\,\alpha^2 + \binom{m}{4} cos.\,\alpha^{m-4}\, sin.\,\alpha^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(3) $$sin.\,m\,\alpha = \binom{m}{1} cos.\,\alpha^{m-1}\, sin.\,\alpha - \binom{m}{3} cos.\,\alpha^{m-3}\, sin.\,\alpha^3 + \binom{m}{5} cos.\,\alpha^{m-5} sin.\,\alpha^5 \ldots\ldots$$

Vorzugsweise betrachten wir $m=2$ und finden dafür

(4) $$cos.\,2\alpha = cos.\,\alpha^2 - sin\,\alpha^2$$

(5) $$sin.\,2\,\alpha = 2\, sin.\,\alpha\, cos.\,\alpha.$$

Setzen wir noch in der ersteren Gleichung für $sin.\,\alpha^2$ oder $cos.\,\alpha^2$ ihren Ausdruck aus Gl. (3) § 58, so erhalten wir noch

(6) $$cos.\,2\alpha = 2\, cos.\,\alpha^2 - 1 = 1 - 2\, sin.\,\alpha^2.$$

§. 62.

Stammfunctionen halber Zahlen.

Bringt man in diese Gleichungen (6) für α ihre Hälfte $\frac{\alpha}{2}$, so findet man aus ihnen

$$cos.\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos.\,\alpha}{2}}$$

$$sin.\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos.\,\alpha}{2}}.$$

§. 63.

Änderungen der Stammfunctionen bei wachsender Zahl.

Sieht man in den Gleichungen (1) und (2) des §. 60, für das obere Aggregationszeichen, die Zahl β als Wachsthum der α an; so findet man, wenn man dort $\cos.\,\alpha$, hier $\sin.\,\alpha$ abzieht,

$$\cos.\,(\alpha+\beta)-\cos.\,\alpha=-\cos.\,\alpha\,(1-\cos.\,\beta)-\sin.\,\alpha\,\sin.\,\beta$$
$$\sin.\,(\alpha+\beta)-\sin.\,\alpha=-\sin.\,\alpha\,(1-\cos.\,\beta)+\cos.\,\alpha\,\sin.\,\beta,$$

oder auch, wenn man rechts durch β theilt und wieder multiplicirt,

$$\cos.\,(\alpha+\beta)-\cos.\,\alpha=-\beta\left(\frac{1-\cos.\,\beta}{\beta}\cos.\,\alpha+\frac{\sin.\,\beta}{\beta}\sin.\,\alpha\right)$$
$$\sin.\,(\alpha+\beta)-\sin.\,\alpha=\beta\left(\frac{\sin.\,\beta}{\beta}\cos.\,\alpha-\frac{1-\cos.\,\beta}{\beta}\sin.\,\alpha\right).$$

Lässt man nun die Zunahme β der Zahl α so klein sein, dass hinreichend nahe $\frac{1-\cos.\,\beta}{\beta}=0$ und $\frac{\sin.\,\beta}{\beta}=1$ ist, (§. 59, VI); so findet man für die Zunahmen von $\cos.\,\alpha$ und $\sin.\,\alpha$ hinreichend nahe

(1) $$\cos.\,(\alpha+\beta)-\cos.\,\alpha=-\beta\,\sin.\,\alpha$$
(2) $$\sin.\,(\alpha+\beta)-\sin.\,\alpha=\beta\,\cos.\,\alpha.$$

Da $\cos.\,\alpha$ und $\sin.\,\alpha$ ihrer Grösse nach nie die Zahl 1 übersteigen können, so muss, wenn die Zunahme der Zahl α unendlich abnehmend, der Grenze 0 ohne Ende sich nähernd gedacht wird, auch die Änderung des Cosinus und Sinus unendlich abnehmen, das heisst aber auch kurz:

Stetiges (keinen Zwischenwerth übergehendes) *Wachsen der Zahl hat auch stetige Änderung ihres Cosinus und Sinus zur Folge.*

§. 64.

Kleinste Absolutzahl mit gleichen Stammfunctionen.

Unter den positiv beziehlichen oder vielmehr unter den unbezogenen Zahlen gibt es eine gewisse kleinste, deren Cosinus und Sinus einander gleich sind.

Denn denkt man sich die Zahl α stets positiv beziehlich oder insofern auch nur ganz unbezogen, und von 0 an stetig wachsend, und bezeichnet man ihre jeweilige Zunahme allgemein durch β, so dass demnach β als Zunahme positiv beziehlich ist; so gilt von ihren beiden Stammfunctionen Folgendes:

1. Ist α noch hinreichend klein, noch genug nahe an Null, so sind ihre Stammfunctionen positiv beziehlich, (§. 59. V und VI.); mithin ist, vermöge §. 63 Gleich. (1) und (2) die Zunahme des Cosinus, $-\beta\,\sin.\,\alpha$, negativ beziehlich,
„ „ „ Sinus , $\beta\,\cos.\,\alpha$, positiv „ „ ,

d. h. Ist die Zahl hinreichend klein, so muss bei wachsender Zahl
der Cosinus ab-, der Sinus aber zunehmen;
also auch umgekehrt bei abnehmender Zahl
der Cosinus wachsen und der Sinus abnehmen.

2. Für $\alpha = 0$ ist demnach und gemäss §. 59, III., $cos.\ \alpha = +1$ und $sin.\ \alpha = +0$ d. h. Wird die stetig abnehmende positiv beziehliche Zahl α endlich $= 0$, so erreicht ihr *cos.* seinen grössten positiv beziehlichen, also auch überhaupt *seinen möglich grössten Werth* $+1$; ihr *sin.* dagegen *seinen kleinsten positiv beziehlichen Werth* 0.

3. Aus all Diesem und aus der an sich klaren Bemerkung, dass eine veränderliche Zahl niemals weder über ihren grössten möglichen Werth hinaussteigen, noch unter ihren kleinsten möglichen Werth herabsinken kann, erhellet nun:

Wenn die Zahl α von 0 an stetig wächst,
muss *cos.* α von $+1$ an, positiv beziehlich bleibend, stetig abnehmen,
dagegen *sin.* α „ 0 „ „ „ „ „ zunehmen;
mithin muss endlich einmal ihr *cos.* dem *sin.* ganz oder algebraisch (d. i. in Grösse und Beziehung) gleich werden; oder:

Es muss eine gewisse kleinste Absolutzahl geben, deren goniometrische Stammfunctionen einander gleich sind.

Bezeichnen wir nun diese ausgezeichnete Absolutzahl mit s, so ist $cos.\ s = sin.\ s$.
Da nun, (§. 58, (3)) auch $cos.\ s^2 + sin.\ s^2 = 1$
sein muss, so ist

$$cos.\ s^2 = sin.\ s^2 = \tfrac{1}{2}$$

$$cos.\ s = sin.\ s = \frac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

§. 65.

Kleinste Absolutzahlen mit einer annullirten Stammfunction.

Setzt man in §. 61 Gl. (4) und (5) die Zahl $\alpha = s$, so erhält man mit Rücksicht auf das eben Gefundene

$$cos.\ 2s = 0, \quad sin.\ 2s = +1.$$

Die doppelte Zahl s ist demnach die kleinste Absolutzahl, deren Cosinus Null, und deren Sinus $+1$ *ist*; oder deren Cosinus den kleinsten absoluten, und deren Sinus den algebraisch grössten Werth hat.

Setzt man nun eben daselbst $\alpha = 2s$, so findet man

$$cos.\ 4s = -1, \quad sin.\ 4s = 0.$$

Die vierfache Zahl s ist also die kleinste Absolutzahl über Null, deren Sinus Null, und deren Cosinus -1 ist; oder deren Sinus den kleinsten absoluten, und deren Cosinus den algebraisch kleinsten Werth hat.

§. 66.

Ludolphische Zahl oder die Zahl π.

Es lässt sich mit auch nur geringer Überlegung einsehen, dass diese in der natürlichen Potenzirung nach transversiv beziehlichen Exponenten ausgezeichnete Zahl i, oder andere aus ihr leicht berechenbare Zahlen, wie ihre Vielfachen, vielten (aliquoten) Theile, deren Umgekehrte (reciproke Werthe), Potenzen, Wurzeln u. dgl., auch in den Anwendungen der Zahlenlehre auf die verschiedenen Zweige der besonderen Mathematik eigenthümliche Bedeutungen und Benennungen erhalten können. Die rechnende Geometrie, als der am frühesten ausgebildete Zweig der besonderen oder angewandten Zahlenlehre, fand sich veranlasst, solche *ausgezeichnete Bedeutungen und Benennungen dem Vierfachen der Zahl* ε, d. i. der kleinsten Absolutzahl über Null, deren Sinus Null ist, *beizulegen.* Von diesen Benennungen kann aber die Algebra, als abstracte (reine) Zahlenlehre, am füglichsten nur diejenigen benützen, die nicht auf jene geometrischen, also speciell-wissenschaftlichen, Bedeutungen abzielen.

Darum nennt man in der Algebra die kleinste Absolutzahl über Null, deren Sinus Null ist, oder auch deren Cosinus den algebraisch kleinsten möglichen Werth -1 hat, ***die Ludolphische Zahl*** *), oder weil man sie als besondere Zahl stets durch π zu bezeichnen pflegt, die ***Zahl Pi.***

Ist sonach $4\varepsilon = \pi$, so ist $2\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$,

daher gemäss §. 64 und 65

(1) $$\cos.\ \pi = -1, \qquad \sin.\ \pi = 0,$$

(2) $$\cos.\frac{\pi}{2} = 0, \qquad \sin.\frac{\pi}{2} = +1,$$

(3) $$\cos.\frac{\pi}{4} = \sin.\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Setzt man in den Gleichungen (2) und (3) d. §. 61, $\alpha = \pi$, so wird für jede ganze Zahl m

(4) $$\cos.\ m\pi = (-1)^m, \quad \sin.\ m\pi = 0,$$

also für gerade und ungerade Zahlen

(5) $$\cos.\ 2n\pi = +1, \quad \cos.\ (2n+1)\pi = -1.$$

Nimmt man aber $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $m = 2n+1$ an, so wird

(6) $$\cos.\ (2n+1)\frac{\pi}{2} = \cos.\ (n+\tfrac{1}{2})\pi = 0, \quad \sin.\ (2n+1)\frac{\pi}{2} = \sin.\ (n+\tfrac{1}{2})\pi = (-1)^n.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) d. §. 60 findet man, wenn man β erst $= 2n\pi$ und dann $= (2n+1)\pi$ setzt,

*) Von ihrem ersten ausführlichen Berechner *Ludolph van Ceulen* (von Köln).

(7) $$cos.\ (\alpha \pm 2n\pi) = cos.\alpha, \quad sin.\ (\alpha \pm 2n\pi) = -sin.\alpha$$

8) $$cos.\ [\alpha \pm (2n+1)\pi] = -cos.\alpha, \quad sin.\ [\alpha \pm (2n+1)\pi] = -sin.\alpha;$$

dagegen wenn man $\alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ und $\beta = \alpha$ setzt,

(9) $$cos.\ \left[(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right] = \mp sin.\alpha, \quad sin.\ \left[(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right] = (-1)^n\ cos.\alpha.$$

Die Kenntniss dieser Zahl π thut uns demnach für die Potenzirung nach transversiv beziehlichen Exponenten ganz besonders noth. Bevor wir jedoch zu ihrer Berechnung schreiten können, müssen wir noch andere aus den Stammfunctionen leicht abzuleitende und anstatt ihrer in vielen Rechnungen vortheilhaft verwendbare Ausdrücke, die sogenannten *goniometrischen Sprossfunctionen*, kennen lernen.

§. 67.

Goniometrische Sprossfunctionen.

Die *wichtigste*, aus den beiden goniometrischen Stammfunctionen einer Zahl α ableitbare, *Sprossfunction* ist das Verhältniss des Sinus zum Cosinus, der secundären zur primären Stammfunction, genannt die *Tangente der Zahl* α, geschrieben *tangens* α oder kurz *tang.* α, so dass man setzt:

$$tang.\alpha = \frac{sin.\alpha}{cos.\alpha}$$

Zu diesen *drei vornehmsten* und gewöhnlich in Rechnung kommenden *goniometrischen Functionen*, den beiden Stammfunctionen Cosinus und Sinus, und ihrer wichtigsten Sprossfunction der Tangente fügt man noch folgende *untergeordnete Sprossfunctionen* hinzu, als:

1. *Die Umgekehrten aller drei*, und zwar nennt man
   das Umgekehrte des Cosinus die *Secante*,
   „ „ des Sinus „ *Cosecante*,
   „ „ der Tangente „ *Cotangente*; und schreibt

$$sec.\alpha = \frac{1}{cos.\alpha},\quad cosec.\alpha = \frac{1}{sin.\alpha},\quad cot\,\alpha = \frac{1}{tang.\alpha} = \frac{cos.\alpha}{sin.\alpha}$$

oder

$$sec.\alpha.\ cos.\alpha = 1,\quad cosec.\alpha.\ sin.\alpha = 1,\quad cot.\alpha.\ tang.\alpha = 1;$$ und

2. *Die Ergänzungen der zwei Stammfunctionen zu* 1, nämlich man nennt
   die Ergänzung des Cosinus zu 1 den *Sinus versus*,
   „ „ „ Sinus „ „ *Cosinus versus*,

und schreibt $$sinv.\alpha = 1 - cos.\alpha,\quad cosv.\alpha = 1 - sin.\alpha,$$

oder $$sinv.\alpha + cos.\alpha = 1,\quad cosv.\alpha + sin.\alpha = 1.$$

Diese 5 untergeordneten Sprossfunctionen zu berücksichtigen werden wir jedoch in vorliegender Abhandlung nicht weiter veranlasst sein.

§. 68.

Eigenschaften der Tangente.

I. Für $\alpha = 0$ wird $tang.\, 0 = \frac{sin.\, 0}{cos.\, 0} = \frac{0}{1}$, nämlich $tang.\, 0 = 0$; also auch für $lim.\ \alpha = 0$ ist $lim.\ tang.\ \alpha = 0$. (§. 59, III.).

II. Es ist $\frac{tang.\,\alpha}{\alpha} = \frac{sin.\,\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{cos.\,\alpha}$,

folglich (§. 59, VI) für $lim.\,\alpha = 0$ wird $lim.\ \frac{tang.\,\alpha}{\alpha} = lim.\ \frac{sin.\,\alpha}{\alpha} = 1$.

III. *Tangente eines Zahlenbinoms.* Nach unserer Erklärung der Tangente (§. 67) ist

$$tang.\ (\alpha \pm \beta) = \frac{sin.\ (\alpha \pm \beta)}{cos.\ (\alpha \pm \beta)},$$
$$= \frac{sin.\ \alpha\, cos.\,\beta \pm cos.\ \alpha\ sin.\,\beta}{cos.\ \alpha\ cos.\,\beta \mp sin.\,\alpha\ sin.\,\beta},$$

und wenn man in diesem Quotienten Dividend und Theiler durch $cos.\ \alpha\ cos.\,\beta$ theilt, und wieder auf die Erklärung der Tangente Rücksicht nimmt,

$$tang.\,(\alpha \pm \beta) = \frac{tang.\ \alpha \pm tang.\ \beta}{1 \mp tang.\,\alpha\, tang.\ \beta}.$$

IV. *Änderung der Tangente bei wachsender Zahl.* Sieht man in dieser Gleichung, für das obere Aggregationszeichen, β als Wachsthum von α an, so findet man die entsprechende *Zunahme der Tangente*

$$tang.\ (\alpha + \beta) - tang.\ \alpha = \frac{1}{1 - tang.\ \alpha\ tang.\ \beta} \cdot \frac{tang.\,\beta}{cos.\ \alpha^2},$$

weil darin

$$1 + tang.\,\alpha^2 = 1 + \frac{sin.\,\alpha^2}{cos.\,\alpha^2} = \frac{cos.\,\alpha^2 + sin.\,\alpha^2 = 1}{cos.\,\alpha^2} = \frac{1}{cos.\,\alpha^2} \text{ ist.}$$

Ist die Zunahme β so klein, dass man $\frac{tang.\,\beta}{\beta}$ nach II hinreichend nahe $= 1$ setzen kann, so ist die Zunahme von $tang.\ \alpha$ zureichend nahe

$$tang.\,(\alpha + \beta) - tang.\ \alpha = \frac{\beta}{cos.\ \alpha^2}.$$

§. 69.

Einschränkende Grenzen der Verhältnisse des Sinus und der Tangente zur Zahl, wenn diese hinreichend klein ist.

In §. 59, VI und §. 68, IV fanden wir, für hinreichend kleine Zahlen β,

$$sin.\ (\alpha + \beta) - sin.\ \alpha = \beta\ cos.\ \alpha$$
$$tang.\,(\alpha + \beta) - tang.\,\alpha = \frac{\beta}{cos.\,\alpha^2}$$

So lange $\alpha \gtrless 0$ und an sich klein genug ist, muss $0 < \cos.\ \alpha < 1$, daher

$$\frac{\sin.\ (\alpha+\beta) - \sin.\ \alpha}{\beta} = \cos.\ \alpha < 1$$

$$\frac{\operatorname{tang.}\ (\alpha+\beta) - \operatorname{tang.}\ \alpha}{\beta} = \frac{1}{\cos.\ \alpha^2} > 1 \quad \text{sein.}$$

Wenn nun nicht bloss β, sondern auch α, und zwar diese rascher als jene, unendlich abnehmend gedacht, also $\lim.\ \alpha = 0$ und $\lim.\ \beta = 0$ gesetzt wird; so nähert sich $\cos.\ \alpha$ wachsend, folglich $\frac{1}{\cos.\ \alpha^2}$ abnehmend, aber immer stetig der 1, also findet man

$$\lim.\ \frac{\sin.\ \beta}{\beta} \leqq 1, \qquad \lim.\ \frac{\operatorname{tang.} \beta}{\beta} \geqq 1, \qquad \text{für } \lim.\ \beta = o;$$

d. h. *Für hinreichend kleine Zahlen ist das Verhältniss* $\substack{\textit{des Sinus} \\ \textit{der Tangente}}$ *zur Zahl selbst* $\substack{\text{kleiner} \\ \text{grösser}}$ *als* 1, *beide Verhältnisse haben aber* 1 *zur Grenze;*

mithin nähert sich bei stetig und unendlich abnehmender Zahl das Verhältniss $\substack{\text{des Sinus} \\ \text{der Tangente}}$ zur Zahl der gemeinschaftlichen Grenze 1 stetig $\substack{\text{wachsend.} \\ \text{abnehmend.}}$

Nimmt man nun in den letzten Vergleichungen für β einen genugsam kleinen Werth α, so findet man

$$\frac{\sin.\ \alpha}{\alpha} < 1 < \frac{\operatorname{tang.}\ \alpha}{\alpha}.$$

Ist die Zahl α positiv beziehlich oder absolut, und multiplicirt man mit ihr diese drei stets positiv beziehlichen Zahlen, eo wird

$$\sin.\ \alpha < \alpha < \operatorname{tang.}\ \alpha;$$

d. h. *Jede hinreichend kleine Absolutzahl ist grösser als ihr Sinus,*
aber kleiner als ihre Tangente.

§. 70.

Berechnung der Ludolphischen Zahl.

Betrachten wir die Verhältnisse einer beliebigen, einerseits durch ihre Tangente und andererseits durch ihren Sinus getheilten Absolutzahl α zu der zu berechnenden Ludolphischen Zahl π, und bezeichnen wir diese Verhältnisse mit p und q, so dass wir erhalten

$$(1) \qquad p = \frac{\alpha}{\operatorname{tang.}\ \alpha} : \pi \qquad\qquad q = \frac{\alpha}{\sin.\ \alpha} : \pi.$$

Dann folgt hieraus

$$\operatorname{tang.}\ \alpha = \frac{\sin.\ \alpha}{\cos.\ \alpha} = \frac{\alpha}{p\pi}, \qquad \sin.\ \alpha = \frac{\alpha}{q\pi},$$

und, wenn man diese Gleichung durch jene theilt, $\cos.\ \alpha = \frac{p}{q}$.

Bezeichnen wir dieselben Verhältnisse bei der halben Zahl, $\frac{\alpha}{2}$, mit p_1 und q_1, so muss eben so sein

$$\sin.\ \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{q_1\pi}, \qquad \cos.\ \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{p_1}{q_1}.$$

Zwischen den Stammfunctionen von α und $\frac{1}{2}\alpha$ bestehen aber die Beziehungsgleichungen (6) und (5) d. §. 61; folglich, wenn man in diesen die Stammfunctionen durch obige Ausdrücke ersetzt, findet man nach Weglassung der überflüssigen Factoren

$$\frac{p}{q} = 2\,\frac{p_1^2}{q_1^2} - 1, \qquad \frac{1}{q} = \frac{p_1}{q_1^2}.$$

Sieht man in diesen Gleichungen die auf die Zahl α beziehlichen Verhältnisse p und q als durch die Gleichungen (1) bekannt an; so kann man mittels ihrer leicht die auf die halbe Zahl, $\frac{\alpha}{2}$, beziehlichen Verhältnisse p_1 und q_1 ausdrücken. Zu diesem Zwecke eliminirt man aus ihnen q_1^2, indem man der ersten Gleichung die Form

$$\left(1+\frac{p}{q}\right) : 2 = \frac{p_1^2}{q_1^2}$$

ertheilt und sie durch die zweite dividirt, wodurch man erhält

(2) $$p_1 = \frac{p+q}{2}.$$

Danach gibt dieselbe zweite Gleichung

(3) $$q_1 = \sqrt{q p_1}.$$

Diese Gleichungen (2) und (3) lassen also erkennen;

1. dass p_1 das arithmetische Mittel von p und q, und
2. dass q_1 „ geometrische „ „ q „ p_1 ist,

folglich dass p_1 immer zwischen p und q
und q_1 „ „ q „ p_1 liegt.

Nimmt man die von Null verschiedene Absolutzahl α nicht grösser als $2\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, nämlich $0 < \alpha \overset{=}{<} \frac{\pi}{2}$, so ist

$0 < \frac{\alpha}{2} \overset{=}{<} \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$; folglich sind die Beziehungen der goniometrischen Functionen dieser Zahlen α und $\frac{\alpha}{2}$ durchgängig positiv, also auch die der Zahlen p, q, p_1, q_1. Mithin sind in den Gleichungen $\cos.\ \alpha = \frac{p}{q}$ und $\cos.\frac{\alpha}{2} = \frac{p_1}{q_1}$ die Cosinus positiv beziehlich und < 1, also ist auch $p < q$ und $p_1 < q_1$.

Dann ist nach Obigem

$$p < p_1 < q \qquad p_1 < q_1 < q,$$

daher im Zusammenhange

$$p < p_1 < q_1 < q.$$

§. 71.

Fortsetzung.

Wenn man nun die vorgenommene Halbirung der Absolutzahl α fortwährend wiederholt, und die für diese Zahl α durch p und q bezeichneten Verhältnisse

für die Zahlen $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2^2}, \frac{\alpha}{2^3}, \frac{\alpha}{2^4}, \ldots \ldots \frac{\alpha}{2^n}, \ldots$

ähnlich bezeichnet mit $p_1, q_1;\ p_2, q_2;\ p_3, q_3;\ p_4, q_4; \ldots \ldots p_n, q_n; \ldots$

so bilden alle diese nach und nach aus einander zu entwickelnden Verhältnisse die Zahlenreihe

$$p, q;\ p_1, q_1;\ p_2, q_2;\ p_3, q_3;\ p_4, q_4; \ldots \ldots p_n, q_n; \ldots$$

Von dieser gilt, dem Vorhergehenden gemäss, Folgendes:

1. Die beiden ersten Glieder, p und q, werden für eine gewisse Zahl $\alpha > 0$ aber $\leqq \frac{\pi}{2}$, deren *cos.*, *sin.* und *tang.* man kennt, nach den Gleichungen (1) berechnet.

2. Von diesen zwei Gliedern nimmt man das *arithmetische Mittel*, p_1, und stellt es als drittes Glied auf.

3. Von den nunmehrigen zwei letzten Gliedern, q und p_1, rechnet man das *geometrische Mittel* q_1, und setzt es als nächst folgendes Glied an.

4. Und so rechnet man denn fortwährend von den zwei letzt erhaltenen Gliedern *abwechselnd das arithmetische und geometrische Mittel.*

5. Dann liegt jedes spätere Glied zwischen den beiden ihm zunächst vorhergehenden, also auch zwischen jedweden zwei unmittelbar auf einander folgenden früheren Gliedern.

6. Mithin müssen die Glieder dieser Reihe einer gewissen gemeinschaftlichen *Grenze* zustreben, welcher sie sich desto mehr nähern, je spätere sie sind, und welche demnach gleichfalls zwischen jeden zwei benachbarten vorausgehenden Gliedern liegt.

7. Diese Grenze der ohne Ende fortlaufend gedachten Reihe ist $\frac{1}{\pi}$, *das Umgekehrte der Ludolphischen Zahl*, und zwar für sämmtliche $\begin{matrix}\text{arithmetische}\\\text{geometrische}\end{matrix}$ Mittel oder $\begin{matrix}\text{ungeradstellige}\\\text{geradstellige}\end{matrix}$ Glieder die Grenze im $\begin{matrix}\text{Wachsen.}\\\text{Abnehmen.}\end{matrix}$

Denn gemäss der gewählten Bezeichnungen sind nach $n$maliger Halbirung der Zahl α für die sich ergebende Zahl $\frac{\alpha}{2^n}$ die Verhältnisse

$$p_n = \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{tang.\frac{\alpha}{2^n}} : \pi = \frac{1}{\pi} : \frac{tang.\frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}}$$

$$q_n = \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{sin.\frac{\alpha}{2^n}} : \pi = \frac{1}{\pi} : \frac{sin.\frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}}.$$

Bei unendlich fortgesetzt gedachtem Wiederholen dieser Halbirung, das ist für $lim.\, n = \infty$ wird aber $lim. \frac{\alpha}{2^n} = 0$, also vermöge §. 69,

$$lim. \frac{tang.\frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}} \geqq 1 \quad \text{und} \quad lim. \frac{sin.\frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}} \leqq 1$$

folglich $$lim.\, p_n \leqq \frac{1}{\pi} \quad \text{und} \quad lim.\, q_n \geqq \frac{1}{\pi}.$$

8. Die gemeinschaftlichen Anfangsziffern jeglicher zwei unmittelbar auf einander folgenden als Decimalzahlen dargestellten Glieder der Reihe sind demnach auch die *Anfangsziffern des* als Decimalzahl dargestellten *Umgekehrten von π.*

§. 72.

Fortsetzung und Schluss.

Diese Berechnung der umgekehrten Ludolphischen Zahl lässt sich *noch durch folgende Bemerkung namhaft abkürzen.*

Je näher zwei Zahlen einander sind, desto mehr stimmt auch bekanntlich ihr geometrisches Mittel mit ihrem arithmetischen überein. Man wird daher bloss noch das einfachere arithmetische Mittel berechnen, wenn einmal die Glieder der obigen Reihe sich so weit genähert haben, dass ihr arithmetisches und geometrisches Mittel in hinreichend vielen ersten Decimalziffern mit einander übereinstimmen.

Ja hier bedarf man nicht einmal dieser Berechnung der arithmetischen Mittel selbst, sondern man wird dafür nur sogleich ihre Grenze $\frac{1}{\pi}$ berechnen. Denn sind A und B zwei gleichartige Grössen, und stellt man aus ihnen eine Reihe dadurch auf, dass man als nächstes Glied ihr arithmetisches Mittel, so wie überhaupt fortwährend das arithmetische

Mittel der beiden letzt aufgestellten Glieder als neues Glied ansetzt; so ist, wie sich leicht zeigen lässt *), die Grenze der Glieder dieser unendlich erweitert gedachten Reihe

$$= B + \frac{A - B}{3} = B - \frac{B - A}{3}.$$

Bedient man sich der (dekadischen) Logarithmen, so kann man auch aus den Logarithmen der einander schon hinreichend genäherten Glieder in derselben Weise den Logarithmen der Grenze $\frac{1}{\pi}$ berechnen; weil der Logarithme des geometrischen Mittels zweier Zahlen das arithmetische Mittel der Logarithmen dieser Zahlen ist.

Zur Controle kann man von zwei verschiedenen Werthen von α ausgehen, deren Verhältniss zu einander keine Potenz von 2 ist. Hier mag es genügen, bloss $\alpha = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, wofür $p = 0$ und $q = \frac{1}{2}$ wird (§. 70, Gl. (1)). Man findet dazu folgende zusammengehörige Werthe:

n	p_n	q_n	$log.\ p_n$	$log.\ q_n$
0	0	0·5		9·6989700
1	0·25	0·3535534	9·3979400	9·5484550
2	0·3017767	0·3266407	9·4796867	9·5140703
3	0·3142087	0·3203643	9·4972181	9·5056442
4	0·3172865	0·3188217	9·5014516	9·5035479
5	0·3180541	0·3184376	9·5025010	9·5030244
6	0·3182458	0·3183417	9·5027627	9·5028935

Aus den letzten Gliederpaaren berechnet man nun die Grenze

$$\frac{1}{\pi} = 0{\cdot}3183098, \qquad log.\ \frac{1}{\pi} = 9{\cdot}5028499$$

und hieraus

$$log.\ \frac{1}{\pi} = 9{\cdot}5028500, \qquad \frac{1}{\pi} = 0{\cdot}3183097;$$

folglich

$$log.\ \pi = 0{\cdot}4971500, \qquad log.\ \pi = 0{\cdot}4971501$$

$$\pi = 3{\cdot}141594, \qquad \pi = 3{\cdot}141595.$$

Mithin ist in 6 Ziffern genau $\frac{1}{\pi} = 0{\cdot}318309$

$$\pi = 3{\cdot}14159.$$

*) Man vergleiche hiemit in meinem, in *Grunert's* Archiv, Bd. 8, H. 4. S. 400—418 mitgetheilten, Aufsatze den Art. 20, S. 410.

§. 73.

Berechnung der drei goniometrischen Hauptfunctionen für gegebene Zahlen.

I. Ist α eine hinreichend kleine Zahl, so ist (§. 69)

$$sin.\ \alpha < \alpha, \qquad tang.\ \alpha > \alpha.$$

Ferner hat man $\quad cos.\ \alpha = 1 - 2\,(sin.\tfrac{1}{2}\alpha)^2,$ (§. 61,(6))

folglich, weil $\quad sin.\tfrac{1}{2}\alpha < \tfrac{1}{2}\alpha$ ist, $\quad cos.\ \alpha > 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2.$

Theilt man dadurch die erste, und multiplicirt man damit die zweite der vorherigen Ungleichungen, so findet man, weil $tang.\ \alpha = \frac{sin.\ \alpha}{cos.\ \alpha}$ ist,

$$tang.\ \alpha > \frac{\alpha}{1-\frac{1}{2}\alpha^2} = \alpha + \frac{\frac{1}{2}\alpha^3}{1-\frac{1}{2}\alpha^2} \qquad sin.\ \alpha > \alpha - \tfrac{1}{2}\alpha^3.$$

Mithin ist für hinreichend kleine α

$sin.\ \alpha > \alpha - \frac{1}{2}\alpha^3$	aber $< \alpha$	Fehlergrenze $= \frac{1}{2}\alpha^3$
$cos.\ \alpha > 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$	„ < 1	„ $= \frac{1}{2}\alpha^2$
$tang.\ \alpha > \alpha$	„ $< \alpha + \frac{\frac{1}{2}\alpha^3}{1-\frac{1}{2}\alpha^2}$	„ $= \frac{\frac{1}{2}\alpha^3}{1-\frac{1}{2}\alpha^2}$.

II. Gewöhnlich gibt man nur das *Verhältniss der Zahl α zu π*, oder das Mass der durch π gemessenen Zahl α an. Zu diesem Zwecke theilt man π in 180 gleiche Theile und nennt einen solchen Theil *Grad* (^{0}); diesen selbst theilt man in 60 gleiche *Minuten* ($'$), die Minute in 60 gleiche *Secunden* ($''$), und diese endlich theilt man decimal weiter unter; so dass man hat

$$\frac{\pi}{180} = 1^0,\ \frac{1^0}{60} = 1',\ \frac{1'}{60} = 1''.$$

III. *Von einem hinreichend kleinen solchen vielten Theile* von π kann man nun die goniometrischen Functionen sogar schon berechnen, bevor man noch π selbst berechnet hat. Denn da $cos.\frac{\pi}{2} = 0$, $sin.\frac{\pi}{2} = 1$ ist, so kann man gemäss §. 62, durch fortwährendes Halbiren, endlich für die Zahlen $\frac{\pi}{2^n}$ und $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ den $cos.$ und $sin.$ finden, zwischen denen die Zahl $\alpha = 1' = \frac{\pi}{180\cdot 60}$ oder $\alpha = 1'' = \frac{\pi}{180\cdot 60^2}$ liegt, deren Functionen zwischen denen jener zwei Grenzzahlen liegen.

Nun ist für hinreichend kleine Zahlen, sobald

$$\frac{\pi}{2^n} > \alpha > \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

ist, vermöge §. 69

$$sin.\ \frac{\pi}{2^n} : \frac{\pi}{2^n} \leqq sin.\ \alpha : \alpha \leqq sin.\ \frac{\pi}{2^{n+1}} : \frac{\pi}{2^{n+1}} \leqq 1$$

folglich die Sinus ihren Zahlen selbst höchst nahe proportionirt, und also auch

$$sin. \frac{\pi}{2^n} : \frac{1}{2^n} \leqq sin.\ \alpha : \frac{\alpha}{\pi} \leqq sin.\ \frac{\pi}{2^{n+1}} : \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Da in diesen Proportionen für $\alpha = 1'$ der Quotient $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{180.60}$,

„ $\alpha = 1''$ „ „ $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{180.60^2}$

ist: so kann man für $sin.\ \alpha$ zwei zureichend genäherte Grenzen berechnen, ohne π selbst zu kennen.

§. 74.

Berechnung und Verzeichniss der goniometrischen Functionen zu gegebenen Zahlen, und wirkliche Ausrechnung von Potenzen nach transversiv beziehlichen Exponenten.

Nachdem nun die Zahl π aufgefunden ist, kann man für alle anderen Zahlen ihre goniometrischen Functionen, so wie auch die dekadischen und natürlichen Logarithmen derselben berechnen und für den Gebrauch in bequeme Verzeichnisse — *goniometrische Tafeln* — einreihen. Gewöhnlich berechnet man jedoch solche Tafeln nur für gewisse, durch angenommenen Gebrauch festgestellte, vielte Theile von π, und für deren nach einander folgende Vielfachen; wozu (nach §. 73, III.) nicht einmal die Kenntniss von π selbst, sondern nur die des Verhältnisses der Zahl zu π, erforderlich ist, wenn man sich mit angemessen wenigen Decimalstellen begnügt.

Mit Hilfe solcher Verhältnisse lässt sich dann *die Ausrechnung der complexen Potenzen jeder beliebigen Absolutzahl nach transversiv beziehlichen Exponenten mit zureichender Genauigkeit vollbringen.*

Wir können jedoch diese mehr bekannten Gegenstände hier nur kurz andeuten, und müssen auf die Lehrbücher der analytischen Goniometrie, besonders auf „Thibaut's Grundriss der allgemeinen Arithmetik oder Analysis, Göttingen, 1830, Cap. 12," verweisen; weil wir den Raum zu den nachfolgenden, für unseren Zweck äusserst wichtigen und folgereichen, Untersuchungen benützen müssen.

§. 75.

Moivre's Binomialformel.

Vermöge Gleich. (1) in §. 61 ist für jede Zahl m

$$e^{\downarrow m\alpha} = (cos.\ \alpha + \downarrow sin.\ \alpha)^m = cos.\ m\alpha + \downarrow sin.\ m\alpha.$$

Setzt man hierin anstatt α die Zahl $\alpha + 2\mathfrak{a}\pi$, wo $\mathfrak{a}$ (so wie im Folgenden jeder Buchstabe des kleinen deutschen Alphabetes) eine durchlaufende positiv oder negativ beziehliche ganze Zahl vorstellen soll; so findet man, weil gemäss Gl. (7) d. §. 66 diesen zwei

Zahlen ganz dieselben goniometrischen Functionen zukommen, folgende höchst bedeutsame und ergiebige Gleichung

$$((e^{\downarrow\alpha}))^m = ((\cos.\ \alpha + \downarrow \sin.\ \alpha))^m = \cos.\ m(\alpha + 2\mathfrak{a}\pi) + \downarrow \sin.\ m(\alpha + 2\mathfrak{a}\pi) = e^{\downarrow m(\alpha + 2\mathfrak{a}\pi)}$$

welche *die Binomialformel des Moivre*, ihres Entdeckers, genannt wird, und in welcher die Doppelklammern auf die Vieldeutigkeit der Ausdrücke der m Potenz von $\cos.\ \alpha + \downarrow \sin.\ \alpha$ oder $e^{\downarrow\alpha}$ aufmerksam machen.

§. 76.

Vielfältigkeit der Ausdrücke der Potenzen und Wurzeln.

Setzt man in der letzten Gleichung für die Zahl α erst 0, dann π, so erhält man nach §. 59 und 66

(1) $$((+1))^m = e^{\downarrow(2\mathfrak{a})m\pi} = \cos.\ (2\mathfrak{a})m\pi + \downarrow \sin.\ (2\mathfrak{a})m\pi$$

(2) $$((-1))^m = e^{\downarrow(2\mathfrak{a}+1)m\pi} = \cos.\ (2\mathfrak{a}+1)m\pi + \downarrow \sin.\ (2\mathfrak{a}+1)m\pi.$$

I. *Ist der Exponent m eine ganze Zahl,* so sind auch $(2\mathfrak{a})m$ und $(2\mathfrak{a}+1)m$ ganze Zahlen, erstere immer gerad, letztere aber nur dann, wenn m gerad ist, folglich ist gemäss Gl. (4) und (5) d. §. 66

$$\cos.\ (2\mathfrak{a})m\pi = +1,\quad \cos.\ (2\mathfrak{a}+1)m\pi = (-1)^m,\quad \sin.\ (2\mathfrak{a})m\pi = \sin.\ (2\mathfrak{a}+1)m\pi = 0,$$

daher

$$((+1))^m = e^{\downarrow 2\mathfrak{b}\pi} = +1,\quad ((-1))^{2n} = e^{\downarrow 2\mathfrak{b}\pi} = +1,\quad ((-1))^{2n+1} = e^{\downarrow(2\mathfrak{b}+1)\pi} = -1,$$

wie auch sonst bekannt.

II. *Ist aber der Exponent m keine ganze Zahl,* so müssen die Potenzen $((+1))^m$ und $((-1))^m$, weil die willkürliche ganze Zahl $\mathfrak{a}$ von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen kann, im Allgemeinen unendlich viele complexe Ausdrucksweisen gestatten.

Hierbei lässt sich jedoch fragen, ob nicht doch und wann bei den *cos.* und *sin.* von $(2\mathfrak{a})m\pi$ und $(2\mathfrak{a}+1)m\pi$ eine *periodische Wiederkehr* ihrer Werthe, also auch der Ausdrücke von $((+1))^m$ und $((-1))^m$, eintreten könne, d. h. ob es nicht Paare von Zahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ gebe, für welche jene Functionen und diese Ausdrücke gleich ausfallen. Da nun zwei Zahlen nur dann ganz gleiche goniometrische Functionen besitzen, wenn sie um ein Vielfaches von 2π unter sich verschieden sind (§. 66, Gl. 7); so liegt die Antwort auf obige Frage in den zwei Bedingungsgleichungen

$$2\mathfrak{a}m\pi - 2\mathfrak{a}'m\pi = \mathfrak{b}.2\pi,\quad (2\mathfrak{a}+1)m\pi - (2\mathfrak{a}'+1)m\pi = \mathfrak{b}.2\pi.$$

Diese zwei Gleichungen leiten aber auf die einzige

$$(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}')m = \mathfrak{b} \quad \text{oder} \quad m = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'},$$

und aus dieser ersieht man sogleich:

1. Bei den Potenzen der direct beziehlichen Einheit tritt eine *periodische Wiederkehr*

ihrer im Allgemeinen complexen Ausdrücke nur in dem Falle, dann aber auch nothwendig ein, *wenn der Exponent eine rationale Zahl ist.*

2. *Ist demnach der Exponent irrational*, mithin kein Vielfaches von ihm eine ganze Zahl; so hat jede Potenz der direct beziehlichen Einheit unendlich viele verschiedene und durchaus complexe Ausdrücke.

III. *Wenn nun der Exponent m rational*, also (mit Rücksicht auf I.) ein eigentlicher (unganzer) regelmässiger Bruch ist, dessen Zähler und Nenner den grössten gemeinschaftlichen Theiler t haben, und der durch die möglich kleinsten Zahlen dargestellt $\frac{k}{n}$ folglich selbst $=\frac{kt}{nt}$ ist; so bleibt es in den Ausdrücken der Potenzen $((\pm 1))^{\frac{kt}{nt}}$ gestattet, Zähler und Nenner der Multiplicatoren von π durch t abzukürzen; und sonach ist

$$((+1))^{\frac{kt}{nt}} = e^{\downarrow \frac{(2\mathfrak{a})kt}{nt}\pi} = e^{\downarrow \frac{(2\mathfrak{a})k}{n}\pi} = ((+1))^{\frac{k}{n}}$$

$$= \cos.\ \frac{(2\mathfrak{a})k}{n}\pi + \downarrow \sin.\ \frac{(2\mathfrak{a})k}{n}\pi$$

$$((-1))^{\frac{kt}{nt}} = e^{\downarrow \frac{(2\mathfrak{a}+1)kt}{nt}\pi} = e^{\downarrow \frac{(2\mathfrak{a}+1)k}{n}\pi} = ((-1))^{\frac{k}{n}}$$

$$= \cos.\ \frac{(2\mathfrak{a}+1)k}{n}\pi + \downarrow \sin.\ \frac{(2\mathfrak{a}+1)k}{n}\pi.$$

Zur weitern Vereinfachung dieser Ausdrücke werden wir, was immer verstattet bleibt, die Beziehung des Exponenten $\frac{k}{n}$ bloss auf den Zähler k übertragen, und dafür den Nenner n unbezogen nehmen.

Nun gebe $\mathfrak{a}k$ durch n getheilt $\mathfrak{c}$ zum Quotus und $\mathfrak{b}$ zum Reste, welcher positiv beziehlich und nicht Null, also höchstens dem Theiler n gleich sein soll, und daher, weil k und n Primzahlen unter sich sind, jede der n Zahlen 1, 2, 3, ... n sein muss. Eben so gebe $(2\mathfrak{a}+1)k$ durch $2n$ getheilt $\mathfrak{c}$ zum Quotus und, je nachdem k gerad oder ungerad ist, zum Reste $2\mathfrak{b}$ oder $2\mathfrak{b}-1$, nämlich entweder alle positiven geraden Zahlen 2, 4. 6,.... $2n$, oder alle ungeraden Zahlen 1, 3, 5,.... $2n-1$ über 0 und nicht über $2n$; so dass auch hier $\mathfrak{b}=1, 2, 3, \ldots\ldots n$ ist. Es sei nämlich

$$\mathfrak{a}k = \mathfrak{c}n + \mathfrak{b}\,,\quad (2\mathfrak{a}+1)k = \mathfrak{c}\cdot 2n + 2\mathfrak{b}\,,\quad \text{wenn } k \text{ gerad}$$

$$= \mathfrak{c}\cdot 2n + 2\mathfrak{b} - 1, \text{ wenn } k \text{ ungerad ist;}$$

dann hat man

$$\frac{2\mathfrak{a}k}{n}\pi = \mathfrak{c}\cdot 2\pi + \frac{2\mathfrak{b}}{n}\pi,\quad \frac{(2\mathfrak{a}+1)k}{n}\pi = \mathfrak{c}\cdot 2\pi + \frac{2\mathfrak{b}}{n} \text{ oder}$$

$$= \mathfrak{c}\cdot 2\pi + \frac{2\mathfrak{b}-1}{n}\pi.$$

Substituirt man diese Ausdrücke, so kann man gemäss Gl. (7) in §. 66, $\mathfrak{c} \cdot 2\pi$ überall weglassen, so dass nur noch die Zahl $\mathfrak{b}$ zurückbleibt. Diese ist aber völlig unabhängig von k, mithin darf für die möglich grösste Vereinfachung auch $k = 1$ oder $= 2$ gesetzt werden. Auf solche Weise findet man

$$((+1))^{\frac{k}{n}} = e^{\downarrow \frac{2\mathfrak{b}}{n}\pi} = \cos.\frac{2\mathfrak{b}}{n}\pi + \downarrow \sin.\frac{2\mathfrak{b}}{n}\pi = ((+1))^{\frac{1}{n}} = \overset{n}{W}\overline{+1}$$

$$((-1))^{\frac{k}{n}} = e^{\downarrow \frac{2\mathfrak{b}}{n}\pi} = \cos.\frac{2\mathfrak{b}}{n}\pi + \downarrow \sin.\frac{2\mathfrak{b}}{n}\pi = ((+1))^{\frac{1}{n}} = \overset{n}{W}\overline{+1}, \text{ wenn } k \text{ gerad,}$$

$$((-1))^{\frac{k}{n}} = e^{\downarrow \frac{2\mathfrak{b}-1}{n}\pi} = \cos.\frac{2\mathfrak{b}-1}{n}\pi + \downarrow \sin.\frac{2\mathfrak{b}-1}{n}\pi = ((-1))^{\frac{1}{n}} = \overset{n}{W}\overline{-1}, \text{ wenn } k \text{ ungerad.}$$

Und so ist zugleich streng erwiesen, dass die Umgestaltungen

$$((+1))^{\frac{k}{n}} = (([+1]^k))^{\frac{1}{n}} = ((+1))^{\frac{1}{n}}$$

$$((-1))^{\frac{k}{n}} = (([-1]^k))^{\frac{1}{n}} = ((\pm 1))^{\frac{1}{n}}, \text{ wenn } k \begin{matrix}\text{gerad}\\ \text{ungerad}\end{matrix} \text{ ist,}$$

auch hier gestattet sind; was übrigens wohl schon im Begriffe einer Potenz nach gebrochenem Exponenten gegründet ist.

Jede Potenz der direct beziehlichen Einheit nach einem regelmässig gebrochenen Exponenten wird demnach auf eine Wurzel aus einer gleichfalls direct beziehlichen Einheit zurückgeleitet, indem man 1) Zähler und Nenner des Exponenten — den Potenz- und Wurzelexponenten — von allen gemeinschaftlichen Theilern befreit, 2) die Beziehung des gebrochenen Exponenten auf den Zähler (Potenzexponenten) überträgt, also den Nenner (Wurzelexponenten) absolut darstellt, und 3) die Potenzirung nach dem Zähler (Potenzexponenten) ausführt.

Multiplicirt man obige Ausdrücke von $\overset{n}{W}\overline{+1}$ mit dem in I. gefundenen $+1 = -e^{-\downarrow\pi} = e^{-\downarrow 2\pi}$; so erhält man für die Wurzel der direct beziehlichen Einheit die Ausdrücke

$$\overset{n}{W}\overline{+1} = e^{\downarrow \frac{2\mathfrak{b}}{n}\pi} = -e^{\downarrow \frac{2\mathfrak{b}-n}{n}\pi} = -e^{-\downarrow \frac{n-2\mathfrak{b}}{n}\pi} = e^{-\downarrow \frac{2n-2\mathfrak{b}}{n}\pi}$$

$$\overset{n}{W}\overline{-1} = e^{\downarrow \frac{2\mathfrak{b}-1}{n}\pi} = -e^{\downarrow \frac{(2\mathfrak{b}-1)-n}{n}\pi} = -e^{-\downarrow \frac{n-(2\mathfrak{b}-1)}{n}\pi} = e^{-\downarrow \frac{2n-(2\mathfrak{b}-1)}{n}\pi}$$

$$(\mathfrak{b} = 1, 2, 3, \ldots . n).$$

Von diesen Formen wählt man jedesmal diejenige, bei welcher für den betreffenden Werth von $\mathfrak{b}$ der Zähler positiv beziehlich und am kleinsten ausfällt.

Jede Wurzel aus einer direct beziehlichen Einheit hat demnach so viel verschiedene Ausdrucksweisen, als der Wurzelexponent zählt, und von diesen sind blos jene einfach direct beziehlich, in denen der in der allgemeinen Form gebrochene Multiplicator von π in eine ganze Zahl übergeht; nämlich,

wenn n ungerad ist, wird nur für $\mathfrak{b} = n$ die $\sqrt[n]{+1} = +1$ und $\sqrt[n]{-1} = -1$

" " gerad " " " " $\mathfrak{b} = \frac{n}{2}$ " $\sqrt[n]{+1} = -1$

" $\mathfrak{b} = n$ " $\sqrt[n]{+1} = +1$.

Alle übrigen Ausdrücke, so wie für gerade n sämmtliche Ausdrücke der $\overset{n}{W}\overline{-1}$, sind dagegen complex.

Z. B. So findet man mit Rücksicht auf I.

für $n = 2$ und $\mathfrak{b} = 1, 2,$ $\quad \overset{2}{W}\overline{+1} = (e^{\downarrow\pi}, e^{0}) = (-1, +1)$

$$\overset{2}{W}\overline{-1} = \left(e^{\downarrow\frac{\pi}{2}}, -e^{\downarrow\frac{\pi}{2}}\right) = (+\downarrow 1, -\downarrow 1),$$

für $n = 3$ und $\mathfrak{b} = 1, 2, 3,$ weil $\cos.\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin.\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist,

$$\overset{3}{W}\overline{+1} = \left(-e^{-\downarrow\frac{\pi}{3}}, -e^{\downarrow\frac{\pi}{3}}, e^{0}\right) = \left(\frac{-1+\downarrow\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\downarrow\sqrt{3}}{2}, +1\right)$$

$$\overset{3}{W}\overline{-1} = \left(e^{\downarrow\frac{\pi}{3}}, -e^{0}, e^{-\downarrow\frac{\pi}{3}}\right) = \left(\frac{1+\downarrow\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1-\downarrow\sqrt{3}}{2}\right).$$

IV. Die Ergebnisse der hier durchgeführten Untersuchungen geben uns aber nicht bloss die Anleitung, alle Ausdrücke der Potenzen und Wurzeln der direct bezogenen Einheit, $((+1))^{m}$ und $((-1))^{m}$, aufzustellen, sondern auch die der Potenzen und Wurzeln jeder beliebigen direct beziehlichen Zahl a.

Denn es ist $\quad \pm a = \pm 1 \cdot val.\ abs.\ a,$

daher $\quad ((+a))^{m} = (val.\ abs.\ a)^{m} \cdot ((+1))^{m}$

$$((-a))^{m} = (val.\ abs.\ a)^{m} \cdot ((-1))^{m}.$$

Deswegen genügt es vollständig, wenn wir unsere ferneren Untersuchungen über die Vielfältigkeit der complexen Form der Potenzen und Wurzeln lediglich auf jene der Wurzeln aus der direct beziehlichen Eins beschränken.

§. 77.

Berücksichtigung der früher erwiesenen Vieldeutigkeit der ablenkenden Beziehungen von Wurzeln.

Legen wir in den eben erwiesenen Ausdrücken

$$\overset{n}{W}\overline{+1} = e^{\downarrow\frac{2\mathfrak{b}}{n}\pi}, \quad \overset{n}{W}\overline{-1} = e^{\downarrow\frac{2\mathfrak{b}-1}{n}\pi}, \quad \mathfrak{b} = 1, 2, 3, \ldots n,$$

der durchlaufenden Anzahl $\mathfrak{b}$ ihren niedersten Werth 1 bei, und bezeichnen wir diese indi-

viduelle Wurzel durch das einfache Wurzelzeichen, so ist, mit Rücksicht auf die, im 3. Hauptst. *A*, §. 35 — 42, abgehandelte Vieldeutigkeit der Beziehungen der Wurzeln,

$$\sqrt[n]{+1} = e^{\downarrow\frac{2\pi}{n}} = \cos.\frac{2\pi}{n} + \downarrow \sin.\frac{2\pi}{n} = (\sqrt[n]{+})1$$

$$\sqrt[n]{-1} = e^{\downarrow\frac{\pi}{n}} = \cos.\frac{\pi}{n} + \downarrow \sin.\frac{\pi}{n} = (\sqrt[n]{-})1.$$

Beachtet man ferner, dass

$$e^{\downarrow\frac{2b}{n}\pi} = \left(e^{\downarrow\frac{2\pi}{n}}\right)^{b} = \left(e^{\downarrow\frac{\pi}{n}}\right)^{2b} \text{ und } e^{\downarrow\frac{2b-1}{n}\pi} = \left(e^{\downarrow\frac{\pi}{n}}\right)^{2b-1}$$

ist, so findet man das folgende äusserst wichtige Ergebniss:

$$\sqrt[n]{+1} = e^{\downarrow\frac{2b}{n}\pi} = \cos.\frac{2b}{n}\pi + \downarrow \sin.\frac{2b}{n}\pi = (\sqrt[n]{+1})^{b} = (\sqrt[n]{+})^{b}1$$

$$= (\sqrt[n]{-1})^{2b} = (\sqrt[n]{-})^{2b}1$$

$$\sqrt[n]{-1} = e^{\downarrow\frac{2b-1}{n}\pi} = \cos.\frac{2b-1}{n}\pi + \downarrow \sin.\frac{2b-1}{n}\pi = (\sqrt[n]{-1})^{2b-1} = (\sqrt[n]{-})^{2b-1}1,$$

$(b = 1, 2, 3, \ldots n)$ d. h.

1. *Die n verschiedenen Formen der n^{ten} Wurzeln aus -1 sind insgesammt die 1 (Eins), genommen in den n nach einander folgenden* $\frac{\textit{geradzähligen}}{\textit{ungeradzähligen}}$ *Aufstufungen der nfach abgestuften negativen Beziehung,*

2. *Die n verschiedenen Formen der n^{ten} Wurzeln aus $+1$ sind insgesammt die 1, genommen in den n nach einander folgenden Aufstufungen der nfach abgestuften positiven Beziehung.*

§. 78.

Neue wichtige Wahrheit der Analysis.

Jede natürliche Potenz nach einem transversiv beziehlichen Exponenten ist die Einheit, genommen in einer überhaupt ablenkenden Beziehung, deren Ablenkung von der Grundbeziehung sich zum Gegensatze oder zur Umlenkung *so verhält, wie der Exponent zur Ludolphischen Zahl* (π), oder deren Ablenkung durch den Exponenten vorgestellt wird, wenn man den Gegensatz oder die Umlenkung durch π darstellt.

Denn nach dem bisher Gefundenen ist

$$e^{\downarrow\pi} = -1 = (-)^{1}1 \qquad e^{\downarrow 2\pi} = +1 = (-)^{2}1$$

$$e^{\downarrow\frac{1}{2}\pi} = +\downarrow 1 = (\sqrt[2]{-})1 = (-)^{\frac{1}{2}}1 \qquad e^{\downarrow\frac{3}{2}\pi} = -\downarrow 1 = (\sqrt[2]{-})^{3}1 = (-)^{\frac{3}{2}}1$$

$$e^{\downarrow\frac{1}{n}\pi} = (\sqrt[n]{-})^{1}1 = (-)^{\frac{1}{n}}1 \qquad e^{\downarrow\frac{2}{n}\pi} = (\sqrt[n]{-})^{2}1 = (-)^{\frac{2}{n}}1$$

$$e^{\downarrow\frac{2b}{n}\pi} = (\sqrt[n]{-})^{2b}1 = (-)^{\frac{2b}{n}}1 \qquad e^{\downarrow\frac{2b-1}{n}\pi} = (\sqrt[n]{-})^{2b-1}1 = (-)^{\frac{2b-1}{n}}1;$$

mithin gilt der Satz für die hier aufgeführten einzelnen Exponenten.

Überhaupt, wenn in $e^{\downarrow\alpha}$ das Verhältniss des Exponenten α zu π *rational*, also dem der zwei ganzen Zahlen k und n gleich, nämlich $\alpha : \pi = k : n$ ist; so findet man $\alpha = \frac{k}{n}\pi$, daher

$$e^{\downarrow\alpha} = e^{\downarrow\frac{k}{n}\pi} = (e^{\downarrow\pi})^{\frac{k}{n}} = (-1)^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{-})^{k}\,1 = (-)^{\frac{k}{n}}\,1 = (-)^{\frac{\alpha}{\pi}}\,1.$$

Es ergibt sich demnach hier die Beziehung der 1, indem man die negative erst $n$mal abstuft, und die $n$fache Abstufung wieder $k$fach aufstuft; oder wenn man den n^{ten} Theil der Umlenkung $k$mal nach einander wiederholt; also verhält sich die Ablenkung der Beziehung der 1 in $e^{\downarrow\alpha}$ zum Gegensatze (zur Umlenkung), wie $k : n$ oder wie $\alpha : \pi$.

Sobald der Satz aber für jedes rationale Verhältniss $\alpha : \pi$ gilt, muss er auch für jedwedes *irrationale* gelten; denn dieses ist nur eine Grenze eines veränderlichen rationalen Verhältnisses $\frac{k}{n}$ von gleichzeitig unendlich wachsenden Gliedern, n und k.

Es ist nämlich, wenn $\frac{\alpha}{\pi} = lim.\frac{k}{n}$ für $lim.\ n = \infty$ und $lim.\ k = \infty$ ist,

$$\alpha = \pi\ lim.\frac{k}{n}, \quad e^{\downarrow\alpha} = e^{\downarrow\pi\ lim.\frac{k}{n}} = lim.\ e^{\downarrow\pi\frac{k}{n}} = lim.\ (-)^{\frac{k}{n}}1 = (-)^{\frac{\alpha}{\pi}}1.$$

Man hat demnach überhaupt $e^{\downarrow\alpha} = e^{\downarrow\pi\frac{\alpha}{\pi}} = (e^{\downarrow\pi})^{\frac{\alpha}{\pi}}$,

also auch $e^{\downarrow\alpha} = cos.\ \alpha + \downarrow\ sin.\ \alpha = (-1)^{\frac{\alpha}{\pi}} = (\sqrt[\pi]{-1})^{\alpha} = (\sqrt[\pi]{-})^{\alpha}\,1 = (-)^{\frac{\alpha}{\pi}}\,1.$

Der Exponent α in $e^{\downarrow\alpha}$ lässt sich demnach als Masszahl (Zahlwerth) der Ablenkung der Beziehung der dieser Potenz gleichenden Einheit ansehen, wenn man den Gegensatz oder die Umlenkung durch π vorstellt.

Für $\alpha = 1$ ist $e^{\downarrow 1} = cos.\ 1 + \downarrow\ sin.\ 1 = \sqrt[\pi]{-1} = (\sqrt[\pi]{-})1 = (-)^{\frac{1}{\pi}}1.$

Als *Messeinheit der Ablenkungen* oder als Ablenkung 1 dient daher hier diejenige Ablenkung, die πfach wiederholt den Gegensatz oder die Umlenkung liefert.

§. 79.

Nächste Folgen.

Aus diesem für die Lehre von der Ablenkung oder Abweichung der Beziehungen der Grössen äusserst wichtigen Lehrsatze, der bis jetzt verborgen geblieben war, weil man noch nie mit solcher Sorgfalt, als hier geschehen, Grösse und Beziehung an den Grössen unterschieden hat, fliessen nun zunächst folgende Wahrheiten:

1. Die Potenz $e^{\downarrow\alpha} = \cos.\,\alpha + \downarrow \sin.\,\alpha = \sqrt[\frac{\pi}{\alpha}]{-1} = \sqrt[\frac{2\pi}{\alpha}]{+1} = (-1)^{\frac{\alpha}{\pi}} = (+1)^{\frac{\alpha}{2\pi}}$

ist jene Wurzel aus -1, deren Grad $\frac{\pi}{\alpha}$ ist, also

auch „ „ „ $+1$, „ „ $\frac{2\pi}{\alpha}$ ist;

oder jene Potenz von -1, deren Exponent $\frac{\alpha}{\pi}$

„ „ „ „ $+1$, „ „ $\frac{\alpha}{2\pi}$ ist;

jede solche Wurzel oder Potenz genommen in der um den Betrag α ablenkenden Beziehung.

2. Da der die Ablenkung der Beziehung messende Exponent α sich *stetig* ändernd (wachsend oder abnehmend) gedacht werden kann; so harmonirt dieser Umstand sehr gut damit, dass auch die Ablenkung der Beziehung mancher Grösse *stetig* sich ändern kann; was z. B. bei der Ablenkung der Stellung oder Richtung eines sich umdrehenden Gegenstandes von der anfänglichen Stellung oder Richtung am klarsten sich erkennen lässt.

3. Weil jede Grösse A auch als sie selbst einmal genommen, mit 1 (Eins) multiplicirt, nämlich $A = 1.A$ dargestellt werden kann, und weil jede Potenz und Wurzel von 1 der Grösse nach immer wieder 1 ist; so kann man auch jede Beziehung φ, in welcher diese Grösse genommen werden soll, von der Grösse selbst auf diesen Multiplicator 1 übertragen, also $\varphi\,A = \varphi 1.\,A$ darstellen, z. B. $\pm A = (\pm 1).\,A$, $\pm\downarrow A = (\pm\downarrow 1).\,A$.

Nachdem uns nun die Rechnung selbst in den Potenzen und Wurzeln der direct beziehlichen Einheit, so wie in den ihnen gleichen natürlichen Potenzen nach transversiv beziehlichen Exponenten, auf die ihnen gleiche Einheit, in angemessen abweichenden Beziehungen genommen, geleitet und dadurch gewiesen hat, wie die Einheit mit ihrer ablenkenden Beziehung in eine derlei Potenz oder Wurzel ganz innig verschmolzen wird; so können wir diese Potenzen und Wurzeln vortheilhaft benützen, um *die betreffende abweichende* — weder directe noch transversive — *Beziehung jeder Grösse* in bekannten Zeichen *anzudeuten*, und daher in den ferneren Rechnungen die bisher gebrauchten neuen und jedenfalls befremdenden Zeichen der ablenkenden Beziehungen bei Seite zu lassen. Auch diese allgemeinen Beziehungszeichen sind, so wie die besondern, $+$, $-$, $\downarrow$, den Zeichen der Grössen vorzuschreiben.

Auf diese Weise können und werden wir überhaupt, wenn φ was immer für eine Beziehung andeutet, anstatt φA lieber $(\varphi 1)A$ oder $\varphi 1.\,A$ schreiben, und insbesondere

anstatt $(\sqrt[n]{-})A$ oder $(-)^{\frac{1}{n}}A$ lieber $(\sqrt[n]{-1})A$ oder $(-1)^{\frac{1}{n}}A$ oder $e^{\downarrow\frac{\pi}{n}}A$

„ $(\sqrt[n]{-})^r A$ „ $(-)^{\frac{r}{n}}A$ „ $(\sqrt[n]{-1})^r A$ „ $(-1)^{\frac{r}{n}}A$ „ $e^{\downarrow\frac{r}{n}\pi}A$

anstatt $(\sqrt[\pi]{-})^{\alpha}A$ oder $(-)^{\frac{\alpha}{\pi}}A$ lieber $(\sqrt[\pi]{-1})^{\alpha}A$ oder $(-1)^{\frac{\alpha}{\pi}}A$ oder $e^{\downarrow\alpha}A$;*)

„ $(\overset{n}{W}-)A$ lieber $(\overset{n}{W}-1)A$ oder $e^{\downarrow\frac{2b-1}{n}\pi}A$

„ $(\overset{n}{W}+)A$ „ $(\overset{n}{W}\overline{+1})A$ „ $e^{\downarrow\frac{2b}{n}\pi}A$, $(b = 1, 2, 3, \ldots n)$.

Anmerkung 1. Es dürfte zwar scheinen, als hätten wir dieses Mittel schon vom Anfang herein in unseren Erforschungen der ablenkenden Beziehungen benützen sollen; allein wir würden nicht nur nimmer die Beziehung von der Grösse so streng geschieden erhalten haben, sondern auch zu einem solchen unnatürlichen und gekünstelten Vorgange nicht durch die Rechnung selbst veranlasst gewesen sein.

Anmerkung 2. Zur Vereinfachung und leichteren Erkennung der Bezeichnung der ablenkenden Beziehungen möchte es vielleicht angemessen sein, die der Messeinheit der Ablenkungen entsprechende ablenkende Beziehung $\sqrt[\pi]{-}$ oder $(-)^{\frac{1}{\pi}}$ durch ein *eigenthümliches Zeichen — ja nicht durch einen Buchstaben — zu bezeichnen.* Ich würde, um darauf aufmerksam zu machen, dass dabei eine *Abstufung der negativen Beziehung* anzudeuten sei, das Negativitätszeichen mit ein paar darunter gestellten Punkten, nämlich $\underset{\cdot\cdot}{-}$, vorschlagen; zumal dieses Zeichen, meines Wissens, sonst noch von keinem Algebraisten gebraucht ward, in der Hand- und Druckschrift leicht ausführbar ist, und zugleich das unmittelbare Darüberschreiben des Zahlwerthes, z. B, α, der Ablenkung der betreffenden ablenkenden Beziehung gestattet, als: $\overset{\alpha}{\underset{\cdot\cdot}{-}}$. Sonach wäre

$$e^{\downarrow\alpha} = cos.\ \alpha + \downarrow sin.\ \alpha = (-)^{\frac{\alpha}{\pi}}1 = \overset{\alpha}{\underset{\cdot\cdot}{-}}1\ ,\quad e^{\downarrow\alpha}A = (cos.\ \alpha + \downarrow sin.\ \alpha)A = (-)^{\frac{\alpha}{\pi}}A = \overset{\alpha}{\underset{\cdot\cdot}{-}}A.$$

Indess um nicht durch solche neue Zeichen meiner Abhandlung ein allzu fremdartiges Aussehen zu geben, halte ich es für rathsamer, mich mit den üblichen Zeichen, so gut es geht, zu behelfen; zumal diese die weiteren Umstaltungen der Rechnungsausdrücke namhaft erleichtern und von den gleichgeltenden Zeichen $e^{\downarrow\alpha}$, $(-)^{\frac{\alpha}{\pi}}$, $\overset{\alpha}{\underset{\cdot\cdot}{-}}$, so wie von den durch Andere vorgeschlagenen das erste auch in der Schrift möglichst einfach ist.

§. 80.

Entferntere Folgen.

I. Jede complexe Zahl lässt sich als Product einer absoluten Zahl mit einer natürlichen Potenz nach transversiv beziehlichem Exponenten darstellen.

*) Man kann sonach $(-1)^{\frac{\alpha}{\pi}}A$ oder $e^{\downarrow\alpha}A$ kurz lesen: „die um α ablenkend beziehliche (Grösse oder Zahl) A."

Denn es ist $a + \downarrow b = a\left(1 + \downarrow \frac{b}{a}\right)$. Welche Grösse und directe Beziehung nun auch die Zahlen a und b, also auch ihr Quotient $\frac{b}{a}$ haben mögen; so muss es doch unter den zwischen $-\infty$ und $+\infty$ begriffenen Tangenten sicher eine, diesem Quotienten völlig (in Grösse und Beziehung) gleiche, daher auch in jedem Bereiche von Zahlen, deren Tangenten nicht nur zwischen 0 und ∞ sich ausbreiten, sondern auch zur Hälfte positiv, zur Hälfte negativ beziehlich sind, eine gewisse Zahl ω vorkommen, deren Tangente jenem Quotienten ganz gleicht, so dass

$$\frac{b}{a} = tang.\ \omega = \frac{sin.\ \omega}{cos.\ \omega}$$

gesetzt werden kann. Hieraus folgt nun

$$\frac{a}{cos.\ \omega} = \frac{b}{sin.\ \omega} = \frac{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{cos.\ \omega^2 + sin.\ \omega^2}} = \pm\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Die Zahl ω muss also auch so beschaffen sein, dass ihr Cosinus zu ihrem Sinus sich eben so verhält, wie a zu b, und dass die Beziehungen dieser Functionen jenen von a und b entweder gleich oder entgegengesetzt sind. Richtet man, was natürlicher ist, diese Beziehungen *gleich* ein, nämlich jene von $cos.\ \omega$ gleich der von a, und also die des $sin.\ \omega$ gleich der von b; so muss die vorkommende Wurzel positiv beziehlich oder nur absolut genommen werden. Man erhält demnach

(1) $$\frac{a}{cos.\ \omega} = \frac{b}{sin.\ \omega} = val.\ abs.\ \sqrt{a^2 + b^2} = r,$$

wenn man den absoluten Werth der $\sqrt{a^2 + b^2}$ mit r bezeichnet.

Dann findet man für die Zahl ω nach den Bestimmungsgleichungen

(2) $$cos.\ \omega = \frac{a}{r}, \quad sin.\ \omega = \frac{b}{r}. \quad tang.\ \omega = \frac{b}{a}$$

zwar immerhin noch, wegen §. 66, Gl. 7, beliebig viele, je um 2π von einander unterschiedene Werthe; aber es wird sich doch nur ein einziger, positiv beziehlicher, 2π nicht über steigender Werth dafür mit Entschiedenheit aufstellen lassen; der denn auch fernerhin immer gemeint sein soll.

Sind so aus a und b die Zahlen r und ω berechnet, so hat man

(3) $$a = r\ cos.\ \omega, \quad b = r\ sin.\ \omega,$$

folglich

(4) $$a + \downarrow b = r\ (cos.\ \omega + \downarrow sin.\ \omega) = e^{\downarrow\omega} r.$$

Nach *Cauchý* nennt man die Absolutzahl r den *Modul* und die goniometrische complexe Zahl $cos.\ \omega + \downarrow sin.\ \omega$, oder die von ihr ausgedrückte Potenz $e^{\downarrow\omega}$, den *reducirten Ausdruck* der vorgelegten *complexen Zahl* $a + \downarrow b$.

II. Besehen wir diesen Ausdruck der complexen Zahl von einer neuen, bis jetzt noch von Niemanden beschauten, Seite, indem wir erwägen, dass $e^{\downarrow\omega} = cos.\ \omega + \downarrow sin.\ \omega$

vermöge des von uns, in §. 79, 3., Gefundenen die Beziehung andeuten kann, deren Ablenkung von der Grundbeziehung durch die Zahl ω vorgestellt wird. Dann spricht der Ausdruck

(5) $$a + \downarrow b = e^{\downarrow\omega} r = (-1)^{\frac{\omega}{\pi}} r$$

folgenden höchst wichtigen *Lehrsatz* aus:

Jede durch eine complexe Zahl $a + \downarrow b$ vorgestellte Grösse ist eigentlich die durch den Modul r der complexen Zahl dargestellte Grösse in einer Beziehung $e^{\downarrow\omega}$ oder $(-)^{\frac{\omega}{\pi}}$ genommen, deren Ablenkung von der Grundbeziehung durch eine Zahl ω gemessen wird, welche zu Cosinus und Sinus die Quotienten der Glieder der complexen Zahl durch ihren Modul hat.

III. Hieraus und aus Früherem (§. 58 und 78) folgt auch umgekehrt

(6) $$e^{\downarrow\omega} r = (-1)^{\frac{\omega}{\pi}} r = r \cos. \omega + \downarrow r \sin. \omega,$$

d. h. *Jede von einer Zahl r vorgestellte und in einer Beziehung, deren Ablenkungs-Masszahl ω ist, genommene Grösse kann als complexes Aggregat (Binom) einer direct beziehlichen Grösse $r \cos. \omega$ und einer transversiv beziehlichen $r \sin. \omega$ dargestellt werden.*

IV. So ist denn thatsächlich nachgewiesen, dass jede, wie immer abweichend beziehliche Grösse auf zwei gekreuzt — direct und transversiv — beziehliche Grössen zurückgeführt, also durch eine complexe Zahl dargestellt werden kann, und *dass die complexe Form die allgemeinste Form aller Zahlen ist,* wenn ihre Grösse und Beziehung zugleich berücksichtiget werden.

§. 81.

Betrachtung über die Äquivalenz complexer Grössen mit ablenkend beziehlichen.

Über die Wahrnehmung, dass eine direct beziehliche Grösse a mit einer transversiv beziehlichen b in die complexe Grösse $a + \downarrow b$ aggregirt einer ablenkend beziehlichen $e^{\downarrow\omega} r = (-1)^{\frac{\omega}{\pi}} r$ gleichgilt, wofern r und ω nach den Gleichungen (1) und (2) d. §. 80 bestimmt werden; und umgekehrt, dass eine ablenkend beziehliche Grösse $e^{\downarrow\omega} r = (-1)^{\frac{\omega}{\pi}} r$ zweien gekreuzt beziehlichen Grössen, der direct beziehlichen $a = r \cos. \omega$ und der transversiv beziehlichen $b = r \sin. \omega$, in die complexe Grösse $a + \downarrow b$ aggregirt, gleichsteht, haben wir noch folgende *gewichtige Bemerkung* zu machen.

Es scheint, als vereinte (vergesellschaftete) man dort zwei Grössen a und b in Eine r, und als zerfällte man hier Eine Grösse r in zwei a und b; und doch ist *weder* das algebraische Aggregat $a + b$ der zwei direct beziehlich genommenen Grössen a und b der direct bezogenen Grösse r, *noch* ist die Summe der absoluten Werthe jener zwei Grössen a und b dem absoluten Werthe von r gleich, sondern immer grösser als dieser; was Beides deutlich aus der Gleichheit

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = r^2 + 2ab = r^2 + r^2 sin. 2\omega$$

oder auch aus der

$$a+b = r\,(cos\,\omega + sin\,\omega) = r\sqrt{2}.\ cos.\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right)$$

erhellt. Dafür aber ist

$$r^2 = a^2 + b^2 = (r\ cos.\ \omega)^2 + (r\ sin.\ \omega)^2,$$

nämlich *die zweite Potenz des Zahlwerthes r gleicht der Summe der zweiten Potenzen der Zahlwerthe a und b.*

Nun schätzt man aber die Grösse, den Betrag oder Werth einer Grösse, welche an und für sich, d. i. abgesehen von ihrer algebraischen Beziehung, genommen wird, nach ihrem Verhältniss zu einer festgesetzten Messeinheit dieser Art von Grössen, welches die *Masszahl* oder der *Zahlwerth* dieser Grösse genannt wird; und man legt die Beziehung der Grösse selbst auch dieser ihrer Masszahl bei. Die Vergleichung der also, direct — positiv oder negativ — bezogenen Grössen und ihrer Zahlwerthe kommt aber mit der Vergleichung der unbezogenen (absoluten) Grössen oder ihrer Zahlwerthe nur noch da überein, wo die Beziehungen beider positive (ursprüngliche) sind.

Positiv fallen aber auch jetzt noch immer die Beziehungen der zweiten Potenzen dieser direct beziehlichen Zahlwerthe aus, und diese zweiten Potenzen steigen und fallen mit den absoluten Zahlwerthen der Grössen selbst. Dadurch kann man sich veranlasst sehen, bei direct — positiv oder negativ — beziehlichen Grössen die *Schätzung* ihrer Grösse nicht mehr nach den eben so wie sie bezogenen Zahlwerthen, sondern nach den jedenfalls positiv beziehlichen zweiten Potenzen dieser direct beziehlichen Zahlwerthe vorzunehmen, und eine solche zweite Potenz etwa den *Schätzungsbelauf* oder *Werthanschlag* der betreffenden Grösse zu nennen.*)

Acceptirt man eine solche Schätzungsweise direct beziehlicher Grössen, so sind von obigen durch

$$a = r\ cos.\ \omega, \qquad b = r\ sin.\ \omega, \qquad r = val.\ abs.\ \sqrt{a^2+b^2}$$

vorgestellten Grössen die Werthanschläge

$$a^2 = (r\ cos.\ \omega)^2, \qquad b^2 = (r\ sin.\ \omega)^2, \qquad r^2 = a^2 + b^2;$$

mithin ist

$$r^2 = a^2 + b^2 = (r\ cos.\ \omega)^2 + (r\ sin.\ \omega)^2.$$

d. h. *Wenn eine ablenkend bezogene Grösse r in zwei gekreuzt beziehliche a und b zerfällt wird, oder wenn zwei gekreuzt beziehliche Grössen a und b in eine ablenkend beziehliche r zusammengezogen, vereint werden; so geschieht diess jedesmal so, dass der Werthanschlag des Vereins r den Werthanschlägen der* (vereinten) *Glieder a und b zusammen genommen gleich ist.*

Will man aber auf eine derartige Schätzung nicht eingehen, so kann man das Paar

*) In ähnlicher Weise schätzt man bekanntlich schon längst den Werth eines Diamants nicht nach der einfachen, sondern nach der quadrirten (zweitgradig potenzirten) Anzahl der Karate, die er wiegt.

der Grössen a und b als Substitute oder als Componenten*) der einen r ansehen, und bedingen, dass jedesmal die zweite Potenz des Zahlwerthes r dieser einen Grösse so gross sei, wie die zweiten Potenzen der Zahlwerthe a und b ihrer Substitute.

Auf solche Weise stellt man sich demnach in §. 25 vor, dass man anstatt einer, in die Rubrik der in dem Betrage ω ablenkend beziehlichen Grössen, einzutragenden Grösse r in die Rubrik der direct beziehlichen Grössen die Grösse $a \pm r\ cos.\ \omega$
und in jene „ transversiv „ „ „ „ $b \pm r\ sin.\ \omega$
einschreibe.

§. 82.

Vergleichung der complexen Grössen in Absicht auf das Grösser- und Kleinersein derselben.

Weil die Glieder einer complexen Grösse wegen der Kreuzung ihrer Beziehungen ungleichartig sind, und nicht *eines* allein, sondern beide zugleich auf den Werth oder Betrag der ganzen complexen Grösse Einfluss haben; so muss man diese Grössen entweder nach den unbezogenen (absoluten) Werthen ihrer Glieder schätzen und in Absicht auf Grösse vergleichen, oder nach solchen von den gekreuzt bezogenen Gliedern selbst herstammenden Ausdrücken, in denen die hinderliche Kreuzung der Beziehungen wegfällt. Das erstere, dem Anscheine nach einfachere, Mittel würde eines *einfachen* Zeichens für die absoluten Werthe oder Grössen der beziehlich genommenen Grössen bedürfen, allein ein solches — sonderbar genug — fehlt noch in der Algebra, wiewohl es oft anzuwenden und benöthigt wäre. Das andere und übliche Mittel gründet sich darauf, dass die zweiten Potenzen direct beziehlicher Zahlen immer positiv beziehlich sind. Man betrachtet darum zur Schätzung der Grösse oder des Werthes einer complexen Grösse $a + \downarrow b$ entweder mit *Gauss* die von ihm „*Norm* (norma) der complexen Grösse" genannte Summe der zweiten Potenzen ihrer nicht mehr transversiv sondern nur direct bezogenen Glieder a und b, oder was mehr Beifall gefunden zu haben scheint, mit *Cauchy* den von ihm „*Modul* der complexen Grösse" genannten absoluten Werth, *val. abs.* $\sqrt{a^2 + b^2}$, der zweiten Wurzel aus der Summe der zweiten Potenzen ihrer nicht transvers, sondern nur direct bezogenen Glieder; wonach die von dem Modul dargestellte Grösse angemessen ablenkend beziehlich genommen, die complexe Grösse selbst als ihr Äquivalent stellvertritt.

Wie man nun leicht einsieht, kommt es bei der Vergleichung der Moduln zweier complexen Grössen lediglich auf die absoluten Werthe ihrer Glieder an. Wo die Glieder der complexen Grössen gleich sind, da sind auch die Moduln gleich; und ein Modul ist um so grösser als ein anderer, je grösser eines oder beide Glieder im Vergleiche mit denen der anderen complexen Grösse sind. Dabei kann sogar das direct beziehliche Glied der einen mit dem transversiv beziehlichen der anderen verglichen werden.

*) wie in der Mechanik zwei Kräfte zusammensetzende (Componenten) einer gleichgeltenden (äquivalenten) oder resultirenden Kraft sein können.

Von einem Grösser- oder Kleinersein zwischen zwei complexen Grössen kann natürlich, weder nach der absoluten noch nach der algebraischen Bedeutung des Grösser und Kleiner, die Sprache sein; weil die den complexen Grössen zu substituirenden Moduln im Allgemeinen in völlig verschiedenen, weder gleichen noch entgegengesetzten, von der Grundbeziehung ablenkenden Beziehungen genommen werden. Man müsste daher zur Bezeichnung solcher Vergleichungsstufen complexer Grössen eine neue Benennung einführen, vielleicht „*Weiter* und „*Enger*," oder „Ausgebreiteter und Eingezogener (Beschränkter) u. dgl.

§. 83.

Wichtige Verwendung der abweichenden Beziehungen der Wurzeln.

Vergleicht man zwei verwandte mathematische Forschungen, Rechnungen, Auflösungen von Aufgaben u. dgl. mit einander; so zeigt sich oft, dass in ihnen nicht bloss eine einfache Zahl, sondern eine Potenz einer Zahl entgegengesetzt aggregirt, in der einen addirt, in der andern subtrahirt wird. Solcher Gegensatz der Aggregation lässt sich an allen Potenzen nach *ungeraden Exponenten* durch blosse Entgegensetzung der ursprünglichen Beziehung des Potentiands bewirken; weil wenn p in $-p$ übergeht, p^{2n+1} in $(-p)^{2n+1} = -p^{2n+1}$ sich verwandelt. Allein bei Potenzen nach *geraden Exponenten* bewirkt eine solche Entgegensetzung der Beziehung des Potentiands keine Änderung in der Aggregation der Potenz, weil $(-p)^{2n} = p^{2n}$ ist.

In einem solchen Falle muss man zu den ablenkenden Beziehungen seine Zuflucht nehmen; man wird nämlich, um p^{2n} in $-p^{2n}$ zu umsetzen, p in $(\overset{n}{W}-)p$ oder gemäss §. 79, 3.,

in $$(\overset{2n}{W}\overline{-1})\,p = e^{\downarrow\frac{2b-1}{2n}\pi}\,p = \left(\cos.\ \frac{2b-1}{2n}\pi + \downarrow \sin.\ \frac{2b-1}{2n}\pi\right)p$$
$$(b = 1,\ 2, \ldots\ n)$$

verwandeln, d. h. p in einer der $2n$ ablenkenden Beziehungen der $2n^{ten}$ Wurzel aus einer negativ beziehlichen Zahl nehmen.

Hier nun erkennt man sogleich, dass man sich desselben Mittels auch bei ungeraden Exponenten bedienen könne. Man kann nämlich, wie auch immer der Exponent m beschaffen, nämlich gerad oder ungerad, sein möge, um p^m in $-p^m$ zu verwandeln, p in $(\overset{m}{W}-)p$ oder

in $$\overset{m}{W}\overline{-1}\,p = e^{\downarrow\frac{2b-1}{m}\pi}\,p = \left(\cos.\ \frac{2b-1}{m}\pi + \downarrow \sin.\ \frac{2b-1}{m}\pi\right)p.$$
$$(b = 1,\ 2, \ldots.\ m)$$

vertauschen, d. h. p in einer der m ablenkenden Beziehungen der m^{ten} Wurzel aus negativ beziehlichen Zahlen nehmen.

Anmerkung. Zur Vergleichung und weiteren Verdeutlichung dieses Gegenstandes möge man in *Carnot's* Geometrie der Stellung übers. v. Schumacher, 1. Theil, Altona, 1810, die §§. 54—56 nachlesen.

§. 84.

Andere Ansicht von dem Ablenken der Aggregationsbeziehung.

Die beschriebenen Verwandlungsweisen der Beziehungen der Potentiande machen uns aufmerksam, das Ablenken der Aggregationsbeziehungen von Grössen noch aus einem anderen Gesichtspunkte zu betrachten.

Man kann nämlich ganz allgemein, mögen die von den Zahlen vorgestellten Grössen was immer für Beziehungen zu einander eingehen, sich vorstellen, *dass die Aggregation der Zahlen sich dermassen modificire, dass nicht die Zahlen selbst, sondern erst gewisse Potenzen derselben entgegengesetzt aggregirt werden.*

Und danach kann man diese anderartige Aggregation der Zahlen in zusammengesetzten Factoren oder in zusammengesetzten (mehrgliedrigen) Potentianden, durch deren Multiplication oder Potenzirung man auf Potenzen jener Zahl gelangt, folglich auch die, eine solche Aggregation nach sich ziehende Beziehung der Zahlen sowohl, als der von ihnen vorgestellten (repräsentirten) Grössen, als nicht völlig, sondern nur *zum Theil*, der ursprünglichen entgegengesetzt, als nicht völlig *umlenkend*, sondern als bloss *ablenkend* oder abweichend, betrachten.

Man dürfte hiedurch — wie es mir selbst (im Sommer 1844) erging — verleitet werden, zu wähnen, dass man auf diese Ansicht die Lehre von der Ablenkung oder Abweichung der Beziehungen der Grössen gründen könne; allein man wird bald einsehen, dass hiezu keine geringere Fiction erforderlich wäre, als zu den imaginären Grössen selbst, die man doch umgehen will, und dass man auf diesem Wege nicht zu der so folgenreichen Erkenntniss der Vieldeutigkeit der Beziehungen der Wurzeln gelangen könne.

§. 85.

Schlussbetrachtung.

Nachdem uns die Lehre von dem Potenziren nach transvers beziehlichen Exponenten überwiesen hat, dass alle complexen Grössen gewissen abweichend beziehlichen gleichgelten, und nachdem wir die Zulässigkeit abweichender Beziehungen mit aller Gründlichkeit dargethan haben: so unterliegt es keinem Zweifel mehr, dass alle diejenigen Doctrinen der höheren Algebra oder der Analysis, welche mit solchen complexen Zahlen rechnen, festen Grund und Bestand haben, und mit Hilfe der hier gegebenen Grundlehren einer klaren Auslegung fähig sind; weil das Rechnen mit abweichend beziehlichen Grössen keinem Anstande mehr unterliegen kann, sobald das Abweichen der Grössenbeziehungen ausser Zweifel gestellt ist.

Zu solchen Doctrinen gehören vornehmlich:

1) die Lehre von den complexen — sogenannten imaginären — *Wurzelwerthen* (Wurzeln) der den ersten Grad übersteigenden algebraischen, so wie der transcendenten *Gleichungen*;
2) das *Differenziren* von Functionen complexer Veränderlichen,
3) das *Integriren* complexer Differentiale,
4) *Cauchy's* Lehre von den *bestimmten Integralen* innerhalb imaginärer oder complexer, folglich abweichend beziehlicher (Integrations-) Grenzen.

Zu noch grösserer Aufhellung und Verdeutlichung unserer Theorie des Ablenkens der Grössenbeziehungen und ihrer Anwendung auf die Analysis und auf die höhere oder analytische Geometrie werden wir in dem folgenden Hauptstücke das Rechnen mit complexen Grössen geometrisch veranschaulichen, und die abweichenden Beziehungen der Raumgrössen bildlich vor Augen legen.

Fünftes Hauptstück.

Zeichnende Darstellung abweichender Beziehungen von Raumgrössen und graphische Erläuterung des Rechnens mit abweichend, insbesondere mit gekreuzt beziehlichen oder complexen bestimmten Grössen und Zahlen.

---

§. 86.

Einleitung.

Von den Raumgrössen können nicht nur in entgegengesetzten, sondern auch in abweichenden Aggregations-Beziehungen vorkommen:

1. die *Strecken* (begrenzten Geraden),
2. die *Winkel* und
3. die sie bestimmenden *Kreisbogen*, endlich
4. die ebenen *Figuren*.

Am anschaulichsten und verständlichsten lässt sich die Abweichung der Aggregations-Beziehungen der *Strecken* graphisch darstellen; wesswegen wir sie ausführlich erforschen und zur zeichnenden Erläuterung des Rechnens mit abweichend beziehlichen Grössen und Zahlen verwenden werden.

A. Ablenkende Beziehungen der Strecken.

§. 87.

Gegensatz der Aggregations-Beziehungen der Strecken.

An beiderseits begrenzten Geraden, kurz „Strecken" genannt, beachten wir ausser ihrer Länge (Grösse) auch noch ihre Richtung. Die letztere ergibt sich, wenn man alle Punkte der Strecke, wie sie von dem einen Grenzpunkte aus bis zum anderen nach einander hin liegen, auffasst; und danach nennt man den ersteren Grenzpunkt den *ersten*, *Ausgangs-* oder *Anfangspunkt*, und den anderen den *letzten* oder *Endpunkt* der Strecke, und deutet diess auch im Anschreiben derselben an.

Entgegengesetzt gerichtete, in einerlei Punkt A anfangende *Strecken* AB und AB' *der nämlichen Geraden* XX', in Fig. 10 *stehen in entgegengesetzten Aggregations- Beziehungen* in Absicht auf den Abstand ihres Endpunktes von einem jeden fixirten Punkte O dieser Geraden.

Denn es ist $OB = OA + AB$, aber $OB' = OA - AB'$; die Strecken AB und AB' werden demnach in der Berechnung der Abstände OB und OB' entgegengesetzt aggregirt.

Der Abstand eines Punktes B einer Geraden XX' von einem gewissen fixirten Punkte O derselben wird demnach durch ein solches Aggregat $OA + AB$ oder $OA - AB$ von Strecken bestimmt, und durch diesen Abstand wird wieder jener Punkt B selbst, als Endpunkt der letzt aggregirten Strecke, bestimmt. *Man verallgemeinert daher die hier vorkommenden Begriffe*, indem man ein solches Aggregat entweder einstimmig oder entgegengesetzt gerichteter Strecken als Bestimmungsmittel, als Bestimmendes (Determinans), oder nach dem üblichen Sprachgebrauche als *Bestimmung* (Determination) des fraglichen Punktes B, in Hinsicht sowohl auf die in voraus schon fixirte Gerade oder Axe XX' als auch in Absicht auf den in ihr fixirten Punkt O, ansieht.

§. 88.

Ablenkung oder Abweichung der Aggregationsbeziehungen der Strecken.

Der Gegensatz der algebraischen oder Aggregationsbeziehungen von Strecken ist demnach durch den Gegensatz der Richtungen dieser Strecken bedingt. Allein einer Richtung kann eine andere, mit ihr aus einerlei Punkt ausgehende, nicht bloss entweder *identisch* (einstimmig, gleich) oder aber *entgegengesetzt* sein, sondern sie kann auch von ihr auf mancherlei Weisen verschieden sein, von ihr *abweichen* oder ablenken, mit ihr allerhand *Winkel* bilden, von denen solche, welche je zwei einander entgegengesetzte Richtungen mit einander machen, *gestreckte Winkel* heissen und allesammt unter sich congruent sind.

Desswegen kann sich an eine Strecke OA einer Geraden $X'X$ in Fig. 11. nicht bloss nach ihrer Richtung OAX, oder mit ihr gleichgerichtet, eine andere Strecke AB anschliessen, und sich zu ihr hinzufügen (addiren) oder nach entgegengesetzter Richtung, wie AB', von ihr sich lostrennen (subtrahiren), sondern auch nach vielerhand abweichenden oder ablenkenden Richtungen, wie nach AB_1, AB_2, AB_3, oder nach den ihnen selbst wieder entgegengesetzten AB'_1, AB'_2, AB'_3, sich anschliessen oder anfügen; um so nicht nur die Punkte B und B' der Geraden $X'X$, sondern auch die ausser ihr befindlichen B_1, B_2, B_3 und B'_1, B'_2, B'_3, zu bestimmen. Der Anschluss — die Aggregation — einer Strecke AB an eine gewisse vorhandene OA kann demnach nicht bloss additiv und subtractiv, einerseits positiv andererseits negativ, zusammengefasst direct, sondern auch mannigfaltig ablenkend, abweichend erfolgen. Daher ist auch die algebraische oder Aggregationsbeziehung einer zu betrachtenden Strecke, im Vergleich mit einer gewissen zu Grunde gelegten Beziehung, theils direct — positiv oder negativ — theils ablenkend, abweichend.

Überhaupt ist demnach die Ablenkung oder Abweichung der algebraischen Beziehungen zu aggregirender — in einem gemeinschaftlichen Grenzpunkte an einander zu knüpfender — Strecken durch die Ablenkung oder Abweichung der Richtungen dieser Strecken von einer, als *positive* oder *Grundrichtung*, festgestellten Richtung bedingt, d. i. also durch die Winkel, welche die Richtungen der Strecken mit der Grundrichtung machen. Oder es entsprechen einander, bedingen sich wechselweise:

die algebraische Beziehung und die Richtung der Strecke,
die Grundbeziehung und die Grundrichtung;
das Ablenken der algebraischen Beziehung von der Grundbeziehung, und
das Ablenken der Richtung der Strecke von der Grundrichtung, d. i.
der Winkel der Richtung der Strecke mit der Grundrichtung.

§. 89.

Ausführliche Zergliederung derselben.

Gemäss dem im Früheren (§. 24 — 28) über das Ablenken algebraischer Beziehungen Erörterten und dem über die Natur der Winkel von der Geometrie Aufgestellten erkennt man nun leicht Folgendes:

1. Dem *Gegensatze* der algebraischen Beziehungen zu aggregirender Strecken, oder der Umlenkung der veränderlichen Beziehung einer Strecke aus der Grundbeziehung, entspricht der Gegensatz der Richtungen der Strecken, also der *gestreckte Winkel;* daher entspricht der *Kreuzung* der algebraischen Beziehungen solcher Strecken der halbe gestreckte oder der *rechte Winkel*; dem *Übereinstimmen* einer Beziehung *mit der Grundbeziehung*, wenn jene anfangs von dieser noch gar nicht verschieden gedacht wird, der *Winkel Null*, dagegen wenn jene auf diese nur wieder zurückkehrt, der *volle* (doppelte gestreckte) *Winkel*,

2. *Gleichen Ablenkungen* der algebraischen Beziehungen der Strecken von der Grundbeziehung gehören gleiche Abweichungen der Richtungen der Strecken von der Grundrichtung zu, d. h. *gleiche Winkel* der Richtungen der Strecken mit der Grundrichtung.

3. Damit hier Bestimmtheit herrsche, nur *Eine Beziehung mit Einer Richtung zusammengehöre*, müssen sämmtliche Richtungen in einerlei Ebene enthalten sein, und die Ablenkungen der Richtungen von der Grundrichtung aus nach einer festgesetzten Seite derselben hin genommen werden.

4. So wie die nach einander folgenden Ablenkungen der Richtungen von einander, oder ihre Winkel, zu einander sich addiren; eben so addiren sich auch die Ablenkungen der ihnen entsprechenden Beziehungen zu einander. Mithin gehören Gleichvielfache der Ablenkungen der Beziehungen von der Grundbeziehung, und der Ablenkungen der angehörigen Richtungen von der Grundrichtung zusammen; und sonach sind die Ablenkungen der Beziehungen von der Grundrichtung den Winkeln der zugehörigen Richtungen mit der Grundrichtung *direct proportionirt*. Daher gilt die *Proportion*:

Die Ablenkung der algebraischen Beziehung jeder Strecke verhält sich zur Umlenkung oder dem Gegensatze solcher Beziehungen, gleichwie der Winkel a der Richtung der Strecke mit der Grundrichtung sich verhält zum gestreckten Winkel;

folglich, wenn dieser jederzeit durch G bezeichnet wird, wie $a : G$.

§. 90.

Bezeichnung der algebraischen Beziehungen der Strecken.

Eine algebraische Beziehung, deren Ablenkung zur Umlenkung sich wie die Zahl s zur Ludolphischen Zahl π verhält, bezeichnen wir, gemäss §. 79, 3., durch $(-1)^{\frac{s}{\pi}} = e^{i s}$. Um also durch dieses Symbol die algebraische Beziehung einer Strecke anzudeuten, deren Richtung von der Grundrichtung um den Winkel a ablenkt, muss, in Folge der Gleichstellung der zwei demselben dritten Verhältnisse — der Ablenkung zur Umlenkung — gleichen Verhältnisse (§. 89), in der Potenz $e^{i s} = (-1)^{\frac{s}{\pi}}$
der Exponent s sich verhalten
zur Ludolphischen Zahl π, wie
der Winkel a der Richtung der Strecke mit der Grundrichtung
zum gestreckten Winkel G,
nämlich $s : \pi = a : G$.

Hieraus nun folgt für $(-1)^{\frac{s}{\pi}}$ der Exponent $\frac{s}{\pi} = \frac{a}{G}$

und » $e^{i s}$ » » $s = \frac{a}{G : \pi}$

Weicht demnach eine Strecke von der Länge r mit ihrer Richtung von der Grundrichtung um den Winkel a ab: so ist die Bezeichnung ihrer algebraischen Beziehung, oder eigentlich der nach ihrer Richtung (in solcher Beziehung) genommenen Längeneinheit,

(vergl. §. 79) $(-1)^{\frac{\varepsilon}{\pi}} = e^{i\varepsilon}$,

folglich die Bezeichnung der also bezogenen Strecke r

$$(-1)^{\frac{\varepsilon}{\pi}} r = e^{i\varepsilon} r,$$

wofern $\frac{\varepsilon}{\pi} = \frac{a}{G}$ und $\varepsilon = \frac{a}{G:\pi}$ ist.

§. 91.

Analytische Messung der Winkel.

Der hier vorkommende Quotient oder das Verhältniss $\frac{a}{G:\pi}$ drückt den Zahlwerth oder die Masszahl des Winkels a aus, wenn der π^{te} Theil des gestreckten Winkels G, d. i. derjenige Winkel, der sich zum gestreckten wie 1 zu $\pi = 3{\cdot}1415926\ldots$ verhält und der daher, eben so wie der gestreckte selbst, eine unwandelbare Grösse besitzt, zur Messeinheit der Winkel gewählt wird. Diese der Analysis von selbst sich darbietende — *analytische — Winkeleinheit*, $\frac{G}{\pi}$, wird *den nachfolgenden Forschungen überall zu Grunde gelegt*, und ist demnach, wenn der gestreckte Winkel in 180 Grad (^{0}) getheilt wird, $= \frac{180^0}{\pi} = 57\overset{0}{\cdot}2957795\ldots$, also derselbe spitzige Winkel, den ich (1846) in einer, in Grunert's Archiv Bd. 8, H. 4, Nr. 39, S. 400 — 418 veröffentlichten Abhandlung „*den Gehren*" zu nennen vorgeschlagen habe.

Bezeichnen wir nun, in Rücksicht auf diese für die Analysis festgesetzte Winkeleinheit, den Zahlwerth oder die Masszahl des Winkels a mit α; so ist obiger Quotient $\frac{a}{G:\pi} = \alpha$.

Gewöhnlich nennt man den so gemessenen Winkel a selbst kurzweg „den Winkel α"; was auch wir künftighin befolgen werden.

Bei dieser analytischen Winkelmessung ist demnach
der gestreckte Winkel $= \pi$,
der halbe gestreckte oder der rechte Winkel $= \frac{\pi}{2}$,
der doppelte gestreckte oder der volle Winkel $= 2\pi$.

§. 92.

Einfachere und fernerhin zu gebrauchende Bezeichnung der algebraischen Beziehungen der Strecken.

Halten wir demnach fortan fest an der analytischen Winkelmessung, so ist vermöge §. 90 und 91 obiger Exponent $\varepsilon = \alpha$, d. i. gleich dem Zahlwerthe α des Winkels a oder

gleich dem Winkel α, und daher bezeichnen wir die algebraische Beziehung einer um den Winkel α von der Grundrichtung ablenkenden Strecke r, oder die also ablenkend bezogene Längeneinheit durch $(-1)^{\frac{\alpha}{\pi}} = e^{\downarrow\alpha}$,
folglich die dermassen ablenkend bezogene Strecke r durch

$$(-1)^{\frac{\alpha}{\pi}} r = e^{\downarrow\alpha} r.$$

§. 93.

Einfachste algebraische Bestimmung der Punkte in einer Ebene.

Ist in einer Ebene ein Punkt O (Fig. 12) und eine von ihm ausgehende Richtung (Halbaxe) — Grundrichtung OX fixirt; so wird jeder andere Punkt A dieser Ebene, in Absicht auf diese beiden fixen Gegenstände, ganz natürlich und also auch am einfachsten wie folgt festgelegt oder bestimmt:

1. Die Richtung aus dem Fixpunkte nach dem zu bestimmenden Punkte hin legt man fest, vermittelst des dazu anzugebenden Winkels α dieser Richtung mit der Grundrichtung.

2. In derselben Richtung macht man den geforderten Punkt fest, mittels seines Abstandes a von dem fixen Ausgangspunkte O.

Auf diese Weise stellt sich der zu bestimmende Punkt A als Endpunkt der in jenem Fixpunkte O anfangenden Strecke OA dar, welche durch den Winkel α ihrer Richtung mit der Grundrichtung OX der Lage nach und durch ihre Grösse oder Länge a der Ausdehnung nach, folglich durch beide diese Elemente völlig bestimmt ist.

Da nun $e^{\downarrow\alpha} a$ die algebraische Bestimmung und Bezeichnung dieser *Strecke* ist, so können und werden wir dieselbe auch als die *algebraische Bestimmung* des fraglichen *Punktes*, als des Endpunktes der Strecke, gebrauchen.

§. 94.

Zusammengesetzte algebraische Bestimmung der Punkte in einer Ebene oder Aggregation ablenkend beziehlicher Strecken.

So wie der Punkt A durch α und a in Hinsicht auf O und OX bestimmt wird; eben so kann in Rücksicht auf A und auf die zur OX $\|$e AY durch β und b der Punkt B bestimmt werden; ferner in Hinsicht auf B und $BZ \| OX$ durch γ und c der Punkt C u. s. f., bis endlich durch μ und m ein letzter Punkt M bestimmt wird.

Die nach einander folgenden Strecken

$$a, b, c, d, \ldots\ldots m,$$

von denen jede folgende da anfängt, wo die vorhergehende endet, und welche mit der

Grundrichtung OX oder mit einer ihr gleichgerichteten Parallelen der Ordnung nach die Winkel

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots\ldots\ \mu$$

bilden, folglich in den algebraischen Beziehungen

$$e^{\downarrow\alpha},\ e^{\downarrow\beta},\ e^{\downarrow\gamma},\ e^{\downarrow\delta},\ \ldots\ldots\ e^{\downarrow\mu}$$

vorkommen, schliessen sich an einander zu einer *gebrochenen Linie* (*Polygonale*), $\overline{OABCD\ldots.M}$, deren algebraischer Ausdruck die Summe

$$e^{\downarrow\alpha} a + e^{\downarrow\beta} b + c^{\downarrow\gamma} e + e^{\downarrow\delta} d + \ldots\ldots + e^{\downarrow\mu} m$$

st und als algebraische Bestimmung des Punktes M dient, so wie die gebrochene Linie zur geometrischen Bestimmung dieses Punktes verwendet wird.

Das an einander sich Anschliessen der Strecken in eine gebrochene Linie versinnlicht demnach das Vereinen oder Zusammenaddiren ablenkend beziehlicher Grössen, insbesondere solcher Zahlen, wenn die Strecken nicht bloss, wie sie von Natur aus sind, ungemessen, sondern bereits durch einerlei Längeneinheit gemessen und also durch Zahlen dargestellt gedacht werden.

§. 95.

Gleichheit algebraischer Bestimmungen von Punkten und der algebraischen Summen ablenkend beziehlicher Strecken.

Weil wir bei dem an einander Fügen, dem algebraischen Addiren, ablenkend beziehlicher Strecken in eine zusammenhängende gebrochene Linie hier lediglich *das Bestimmen des Endpunktes* dieser Linie im Auge behalten; so erachten wir uns zur Aufstellung folgender *Grunderklärung* befugt:

Zwei oder mehr zur Bestimmung eines Punktes verwendete *gebrochene Linien*, also auch die ihnen entsprechenden *algebraischen Bestimmungen* dieses Punktes, und die *algebraischen Summen* der diese Linie zusammensetzenden ablenkend beziehlichen Strecken, sind *algebraisch* (d. h. in Absicht auf ihre Wirkung) *gleich* (gleichgeltend), wenn durch sie bloss ein und derselbe Punkt in Rücksicht auf einerlei fixe Gegenstände (Ebene, Grundrichtung, Fixpunkt) bestimmt oder festgestellt wird, folglich alle diese gebrochenen Linien in einerlei Ebene enthalten sind, in demselben Punkte anfangen und enden, und auf die nämliche Grundrichtung bezogen werden.

Hieraus folgt sogleich:

1. In jeder algebraischen Summe ablenkend beziehlicher Strecken, also auch in der entsprechenden algebraischen Bestimmung des Endpunktes der aus den Strecken zusammengesetzten gebrochenen Linie ist *die Ordnung der addirten oder an einander gefügten Strecken* — Glieder — *willkürlich.*

Denn jede zwei unmittelbar auf einander folgende Strecken, wie $OA = a$ und $AB = b$ können durch zwei ihnen gleiche und gleichgerichtete, aber in verwechselter Ordnung an einander hangende Strecken $OA' \# AB = b$ und $A'B \# OA = a$ ersetzt werden, ohne

dass die Spitzen O und B der gebrochenen Linie von ihren Stellen rücken. Mithin können auch in jeder gebrochenen Linie $\overline{OABCD \ldots M}$ alle ihre Glieder oder Strecken beliebig — jedoch immer mit Beibehaltung ihrer Länge und Richtung — unter sich verwechselt werden, ohne dass die Grenzpunkte O und M der gebrochenen Linie ihre Plätze verlassen.

2. *Eine algebraische Summe ablenkend bezogener Strecken wird* (zu einer Strecke oder zu einer eben solchen Summe) *addirt*, oder mehrere dergleichen Summen werden addirt, indem man alle ihre einzelnen Glieder nach einander in beliebiger Ordnung addirt.

Denn eine gebrochene Linie, von der eine derartige Summe herstammt, kann wieder aus mehreren gebrochenen Linien oder aus der ersten Strecke und mehreren nach einander folgenden gebrochenen Linien zusammengesetzt gedacht werden. Von diesen Linien bestimmt jede folgende ihren Endpunkt in Bezug auf den schon bestimmten Endpunkt der nächst vorausgehenden, während die übrigen fixen Gegenstände ungeändert bleiben. Jeder solchen gebrochenen Linie entspricht daher gleichfalls eine Summe ablenkend beziehlicher Srecken, welche so wie die Linie zu allen vorausgehenden addirt wird. Hierbei ist die Ordnung der Glieder willkürlich, weil sie es in den einzelnen Summen ist.

3. Laufen zwei ablenkend beziehliche Strecken aus dem Fixpunkte O aus, wie $OA = e^{\downarrow\alpha}a$ und $OA' = e^{\downarrow\beta}b$, so ist *die ihrer algebraischen Summe algebraisch gleiche Strecke* auch die aus eben diesem Fixpunkte O ausgehende *Diagonale* $OB = e^{\downarrow\varrho}r$ *des über jenen zwei Strecken beschriebenen Parallelogramms* $OABA'$, nämlich

$$e^{\downarrow\alpha}a + e^{\downarrow\beta}b = e^{\downarrow\varrho}r.$$

Denn die Strecke OA' kann auch durch AB, oder die OA durch $A'B$ ersetzt werden.

Auch auf diese Weise lassen sich demnach zwei ablenkend beziehliche Strecken in Eine zusammen addiren; und eben so beliebig viel derlei Strecken summiren.

§. 96.

Grundbedingung für die Anwendbarkeit ablenkender Beziehungen einer angewiesenen Gattung von Grössen.

Damit aber zwei in ablenkenden Beziehungen $e^{\downarrow\alpha}$ und $e^{\downarrow\beta}$ vorkommende Grössen A und B einer gewissen Gattung vereint durch eine Grösse R derselben Gattung, welche in der Beziehung $e^{\downarrow\varrho}$ erscheint, ersetzt werden könne, also

$$e^{\downarrow\alpha}A + e^{\downarrow\beta}B = r^{\downarrow\varrho}R$$

sich setzen lasse; müssen, wenn bei denselben Beziehungen $e^{\downarrow\alpha}$, $e^{\downarrow\beta}$, $e^{\downarrow\varrho}$ die Grössen A' und B' vereint durch R' vertreten werden sollen, also

$$e^{\downarrow\alpha}A' + e^{\downarrow\beta}B' = e^{\downarrow\varrho}R'$$

sich setzen lassen soll, auch bei den nämlichen Beziehungen *die Summe* $A + A'$ und $B + B'$ der A und der B vereint auch *durch die Summe* $R + R'$ der R *vertreten werden;* nämlich es muss sich setzen lassen

$$e^{\downarrow\alpha}(A + A') + e^{\downarrow\beta}(B + B') = e^{\downarrow\varrho}(R + R').$$

Denn diese Gleichheit muss jederzeit nothwendige Folge der Summirung (Addition) jener beiden als bestehend vorausgesetzten Gleichheiten sein.

Wird demnach bei irgend einer Gattung von Grössen die ausgesprochene Grundbedingung nicht erfüllt; so können auch solche Beziehungen nicht mit Erfolg für die Rechnung, auf derartige Grössen angewendet werden.

§. 97.

Diese Grundbedingung ist bei allen, wie immer ablenkenden, Strecken wirklich erfüllt.

Denn angenommen die unter den Winkeln α, β ablenkenden Strecken a und b werden (in Fig. 13 a) durch eine um den Winkel ϱ ablenkende Strecke r, und die unter denselben Winkeln ablenkenden Strecken a' und b' werden (in Fig. 13 b) durch die um den nämlichen Winkel ϱ ablenkende Strecke r' ersetzt.

Verlängert man OA um $AA' = O'A' = a'$, damit $OA'' = a + a'$ wird, und führt man $A''B''$ so, dass sie mit der OX den Winkel β bildet, so ist sie desswegen || AB. Macht man dann $A''\mathfrak{B} = b'$ und den Winkel $A''AX'' = \alpha$, so ist AX'' || OX, und daher auch $A''C''X'' = \beta$. Das System der Geraden AX'', AA'' und $C''A''\mathfrak{B}$ kann demnach mit dem Systeme der Geraden $O'X'$, $O'A'$ und $C'A'B'$ zur Deckung gebracht werden, und ist ihm daher congruent, folglich ist auch $\mathfrak{B}AX'' = B'O'X' = \varrho$ und $A\mathfrak{B} = O'B' = r'$. Schneidet man nun noch $\mathfrak{B}B'' = b$ ab, so dass die von OX um den Winkel β ablenkende $A''B'' = b + b'$ ist, und zieht man aus O und B nach B' die Geraden OB'' und BB'', so fallen sie überein, und BB'' ist $= r'$. Denn weil AX'' || OX und $\mathfrak{B}AX'' = \varrho = BOX$ ist, muss $A\mathfrak{B}$ || OB sein. Ferner weil $\mathfrak{B}B'' = b = AB$ und $\mathfrak{B}B''$ || AB ist, muss $A\mathfrak{B}$ sowohl || als $= BB''$ folglich $BB'' = r'$ sein. Zur $A\mathfrak{B}$ sind also durch denselben Punkt B die OB und BB'' ||, mithin fallen diese beiden Strecken $OB = r$ und $BB'' = r'$ in die gerade Linie OB'' zusammen, und es ist der Winkel $B''OX = \varrho$ und die Strecke $OB'' = r + r'$. — Sonach werden in der That die um die Winkel α und β ablenkenden Summen $a + a'$ und $b + b'$ auch durch die um den Winkel ϱ ablenkende Summe $r + r'$ ersetzt.

§. 98.

Andeutung der interessanten Folgen aus diesen Grundprincipien.

Diese äuserst einfache und ganz naturgemässe geometrische Bestimungsweise der Punkte der Ebene, welche aus der Geometrie nur die allerersten und *einfachsten* Kenntnisse (namentlich die Lehre von der Länge und Messung begrenzter Geraden, von den Richtungen der Geraden und von ihren Winkeln, wovon die Lehre des Senkrecht- und Parallelseins der Geraden besondere Zweige sind, nicht einmal die Lehre von der Congruenz der Dreiecke *) voraussetzt, verbunden mit der unläugbaren Thatsache, dass alle

*) Etwa diejenige *Fundamentallehre der Geometrie*, welche ich in meinen beiden Aufsätzen in *Grunert's* Archiv Bd. 8, H. 3, S. 320 — 334 und H. 3, S. 365 — 374 von §. 1 — 14 für Kenner genugsam verständlich skizzirt habe.

algebraischen Bestimmungen eines und des nämlichen Punktes in einer festgelegten Ebene in Hinsicht auf einerlei vorher fixirte Grundrichtung und auf denselben in ihr festgestellten Punkt, als ganz dasselbe bewirkend, einander algebraisch gleich sein müssen; führt uns auf *höchst bemerkenswerthe Resultate.*

Denn sie eröffnet uns den Eingang in das unübersehbare Gebiet der gesammten *rechnenden Geometrie*, dessen besondere Bezirke die Anwendung der Algebra auf die Geometrie, die Goniometrie mit ihren umfangreichen Anwendungen, Trigonometrie, Polygonometrie und Cyclometrie, und endlich die der verschiedenen Coordinaten-Methoden sich bedienende so genannte analytische Geometrie sind.

Zum Belege, dass diese Behauptung gegründet und nichts weniger als übertrieben ist, wird schon genügen, hier nur einige Grundzüge der Anwendung dieser unseren neuen und einfachen Lehre zu zeichnen.

§. 99.

Zeichnung der Grundzüge einiger nächsten Folgen.

Allgemeinheiten.

I. Bestimmen wir in Rücksicht auf dieselben fixen Gegenstände, so wie oben (in §. 94) den nämlichen Punkt M noch durch eine zweite gebrochene Linie, und bezeichnen wir die analogen Grössen derselben durch accentuirte Buchstaben; so müssen die beiden algebraischen Bestimmungen desselben Punktes M, oder die algebraischen Summen dieser zwei Systeme ablenkend beziehlicher Strecken gleich sein; folglich besteht die Gleichung

$$e^{i\alpha}a + e^{i\beta}b + e^{i\gamma}c + \ldots\ldots + e^{i\mu}m = e^{i\alpha'}a' + e^{i\beta'}b' + e^{i\gamma'}c' + \ldots + e^{i\mu'}m'.$$

Sie ist die *Fundamentalgleichung der Lehre von den gebrochenen Linien*, oder von den Vielseiten, Vielecken, oder der ganzen *Polygonometrie.*

Lösen wir, um dieses überschaulicher zu machen, die Potenzen in ihre complexen Glieder auf, und stellen wir Gleichbeziehliches gleich; so erhalten wir das bekanntere und nur direct Beziehliches enthaltende *Paar von Grundgleichungen der Polygonometrie:*

$$a \cos. \alpha + b \cos. \beta + c \cos. \gamma + \ldots = a' \cos. \alpha' + b' \cos. \beta' + c' \cos. \gamma' + \ldots$$
$$a \sin. \alpha + b \sin. \beta + c \sin. \gamma + \ldots = a' \sin. \alpha' + b' \sin. \beta' + c' \sin. \gamma' + \ldots$$

II. Als *eigenthümlicher Fall* ist hier vorzüglich *der* denkwürdig, in welchem die zweite Bestimmungsweise des Punktes M bloss durch eine einzige, unter dem Winkel ϱ ablenkende, Strecke r bewirkt wird. Da ist

$$e^{i\varrho}r = e^{i\alpha}a + e^{i\beta}b + e^{i\gamma}c + e^{i\delta}d + \ldots + e^{i\mu}m,$$

folglich in bekannter Form

$$r \cos. \varrho = a \cos. \alpha + b \cos. \beta + c \cos. \gamma + \ldots + m \cos. \mu$$
$$r \sin. \varrho = a \sin. \alpha + b \sin. \beta + c \sin. \gamma + \ldots + m \sin. \mu.$$

III. *Für eine geschlossene gebrochene Linie* lässt man am einfachsten den zu bestim-

menden Punkt M, als Endpunkt dieser Linie, in ihren Anfangspunkt O zurückkehren, und erhält so $r = o$, daher

$$e^{\downarrow\alpha}a + e^{\downarrow\beta}b + e^{\downarrow\gamma}c + \ldots\ldots + e^{\downarrow\mu}m = o$$

und in gewöhnlicher Gestalt

$$a \cos.\, \alpha + b \cos.\, \beta + c \cos.\, \gamma + \ldots\ldots + m \cos.\, \mu = o$$
$$a \sin.\, \alpha + b \sin.\, \beta + c \sin.\, \gamma + \ldots\ldots + m \sin \mu = o.$$

§. 100.

Fortsetzung.

Besonderheiten.

I. *Einleitender Hilfssatz.* Gilt der Summe zweier in den Beziehungen $e^{\downarrow\alpha}$ und $e^{\downarrow\beta}$ vorkommenden Grössen a und b die in der Beziehung $e^{\downarrow\varrho}$ stehende Grösse r gleich; so müssen diese drei Grössen a, b, r direct proportional sich ändern, wenn ihre Beziehungen $e^{\downarrow\alpha}$, $e^{\downarrow\beta}$, $e^{\downarrow\varrho}$ ungeändert bleiben sollen.

Denn die angenommene Gleichung $e^{\downarrow\alpha}a + e^{\downarrow\beta}b = e^{\downarrow\varrho}r$ zerfällt in die beiden ihr gleichgeltenden $a \cos.\, \alpha + b \cos.\, \beta = r \cos.\, \varrho$

$a \sin.\, \alpha + b \sin.\, \beta = r \sin.\, \varrho.$

Allein zwei erstgradige Gleichungen von der Form

$$Ax + By + Cz = o$$
$$A'x + B'y + C'z = o$$

geben, wenn man von den Grössen x, y, z zwei nach und nach eliminirt,

$$\frac{x}{BC'-B'C} = \frac{y}{CA'-C'A} = \frac{z}{AB'-A'B}$$

mithin müssen die Verhältnisse $x : y : z$ sich gleich bleiben, wenn die Coefficienten derselben, A, B, C; A', B', C' ungeändert bleiben.

Für festgesetzte Beziehungen $e^{\downarrow\alpha}$, $e^{\downarrow\beta}$, $e^{\downarrow\varrho}$, sind aber obige Coefficienten von a, b, r gleichfalls festgestellt, mithin auch die Verhältnisse $a : b : c$.

Oder: Gehören drei eben so bezogene andere Grössen a', b', r' in gleicher Weise wie a, b, r zusammen, bestehen also gleichzeitig die Gleichungen

$$e^{\downarrow\alpha}a + e^{\downarrow\beta}b = e^{\downarrow\varrho}r$$
$$e^{\downarrow\alpha}a' + e^{\downarrow\beta}b' = e^{\downarrow\varrho}r';$$

so geben diese, gemäss dem Obigen

$$\frac{e^{\downarrow\alpha}}{b'r-br'} = \frac{e^{\downarrow\beta}}{a'r-ar'} = \frac{e^{\downarrow\varrho}}{ab'-a'b}$$

oder auch $e^{-\downarrow\alpha}b'r'\left(\frac{r}{r'} - \frac{b}{b'}\right) = e^{-\downarrow\beta}a'r'\left(\frac{r}{r'} - \frac{a}{a'}\right) = e^{-\downarrow\varrho}a'b'\left(\frac{a}{a'} - \frac{b}{b'}\right)$

Diese Gleichungen können aber für alle willkürlich angenommenen $e^{\downarrow\alpha}$, $e^{\downarrow\beta}$, $e^{\downarrow\varphi}$ nur dann bestehen, wenn die einander gleichgestellten Producte, also auch ihre zusammengesetzten Factoren insgesammt Null sind, folglich wenn

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{r}{r'} \text{ ist.}$$

II. *Parallelenpaare.* Sei in Fig. 14 ein *Parallelenpaar* $p\,||\,q$, in ihm seien a und b *Zwischenlinien*, welche durch die *Parallelstücke* c und d getrennt sind und mit den Parallelen die Winkel α und β bilden *). In einem anderen solchen Parallelenpaare $p'\,||\,q'$ seien unter denselben Winkeln α und β die Zwischenlinien a', b' gegen sie geneigt und durch die Parallelstücke c' und d' getrennt. Dann sind diese gleich geneigten Zwischenlinien einander und den Unterschieden der Parallelstücke direct proportionirt; nämlich es ist

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{d-c}{d'-c'}.$$

Denn bestimmt man in Hinsicht auf O und auf die Grundrichtung OB den Punkt M einmal durch die gebrochene Linie $\overline{OAM}$ und ein zweites Mal durch die $\overline{OBM}$; so findet man, gemäss §. 99, I, die Gleichung

$$e^{\downarrow\alpha}a + c = e^{\downarrow\beta}b + d,$$

daher ist

$$e^{\downarrow\alpha}a = e^{\downarrow\beta}b + (d-c).$$

Hieraus aber folgt die behauptete Proportionalität vermöge des vorigen Hilfssatzes I.

Die Anwendung dieser Darstellung auf *Parallelprojection der Strecken unter gleichen Projectionswinkeln* und auf *Parallelcoordinaten* in Erinnerung zu bringen, wird Kennern schon genügen.

III. *Folgesatz.* Werden zwei Geraden aa' und bb' in Fig. 15 durch zwei Paar insgesammt parallele Geraden $c\,||\,d\,||\,c'\,||\,d'$ durchschnitten, so sind die Stücke a, a' der einen Geraden den Stücken b, b' der anderen Geraden und den Unterschieden $d-c$, $d'-c'$ der die Stücke ausschneidenden Parallelen proportionirt. (Hauptlehrsatz von den *Proportionallinien* und Grundlage der *Ähnlichkeit der Vielecke.*)

IV. *Gewöhnliche oder Orthogonalprojection.* Wird eine Strecke r auf zwei winkelrechte Axen XX' und YY' (orthogonal) *projicirt*; sind x, y ihre Projectionen, und ist φ der *Projectionswinkel* der Richtung AM jener Strecke r mit der Grundrichtung OX der Hauptprojectionsaxe $X'X$: so geben die den Punkt M in Hinsicht auf A und OX bestimmenden Linien $\overline{AM}$ und $\overline{APM}$, vermöge §. 99, II die Gleichung

$$e^{\downarrow\varphi}r = e^{\downarrow 0}x + e^{\downarrow\frac{\pi}{2}}y$$

oder

$$e^{\downarrow\varphi}r = x + \downarrow y.$$

*) Man sehe hierwegen meinen Aufsatz im Archiv, Bd. 8, Hft. 4, Absatz II, S. 367 — 71.

Diess ist sofort die *Grundgleichung der (winkelrechten) Projection* und andrerseits auch die *Verwandlungsgleichung der rechtwinkeligen und Polar-Coordinaten.*

Gewöhnlich geformt gibt sie die allbekannten Gleichungen

$$x = r \cos. \varphi \ , \ y = r \sin. \varphi.$$

Verbindet man mit diesen die goniometrische Gleichung

$$\cos. \varphi^2 + \sin. \varphi^2 = 1,$$

so ergibt sich *der höchst folgenreiche Fundamentalsatz*

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

lautend: Die zweite Potenz des Zahlwerthes einer auf zwei winkelrechte Axen projicirten Strecke gleicht der Summe der zweiten Potenzen der Zahlwerthe ihrer beiden Projectionen. *(Verallgemeinerter Pythagorischer Lehrsatz.)*

So sind denn die beiden Grundpfeiler der algebraisch und goniometrisch rechnenden Geometrie befestigt.

§. 101.

Fortsetzung.

Transformation der Parallel-Coordinaten.

I. *Parallele Verschiebung der Coordinatenaxen.* Coordinatengleichung des Punktes *M* in Fig. 17 (Taf. II.) für die Axen *OX*, *OY*, wenn man den Winkel der *r* mit der Abscisse *x* kurz durch *rx* andeutet, ist

$$e^{\downarrow rx} r = x + e^{\downarrow \alpha} y;$$

die des neuen Ursprungs O', für dieselben Axen

$$e^{\downarrow \varrho x} \varrho = \xi + e^{\downarrow \alpha} \eta;$$

und endlich die des Punktes *M* für die neuen Axen $O'X'$ und $O'Y'$

$$e^{\downarrow r'x} r' = x' + e^{\downarrow \alpha} y'.$$

Nun geben die algebraischen Bestimmungen von *M* durch $\overline{OO'M}$ und $\overline{OM}$

$$e^{\downarrow \varrho x} \varrho + e^{\downarrow r'x} r' = e^{\downarrow rx} r$$

folglich

$$e^{\downarrow r'x} r' = e^{\downarrow rx} r - e^{\downarrow \varrho x} \varrho,$$

und wenn man Obiges substituirt,

$$x' + e^{\downarrow \alpha} y' = (x - \xi) + e^{\downarrow \alpha} (y - \eta),$$

d. i. *die Gleichung zur parallelen Verschiebung der Coordinatenaxen.*

Diese liefert das gewöhnlich geformte Paar Gleichungen

$$x' = x - \xi$$
$$y' = y - \eta.$$

Drückt man aber in ihr die Potenzen complex aus, so verändert sie sich in

$$r' \cos. r'x' + \downarrow r' \sin. r'x' = x' + y' \cos. \alpha + \downarrow y' \sin. \alpha$$
$$= (x - \xi) + (y - \eta) \cos. \alpha + \downarrow (y - \eta) \sin. \alpha,$$

folglich erscheint

$$r'^2 = (x' + y' \ \cos.\ \alpha)^2 + (y' \ \sin.\ \alpha)^2 = x'^2 + y'^2 - 2x'y' \cos.\ \alpha$$
$$= (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - 2(x-\xi)(y-\eta) \cos.\ \alpha,$$

d. i. der bekannte Ausdruck der *Distanz zweier Punkte.*

II. *Drehung der Coordinatenaxen.* Fig. 18. Gleichungen des Punktes M sind

$$e^{\downarrow(\alpha+\varphi)}r = x + \downarrow y, \qquad e^{\downarrow\varphi}r = x' + \downarrow y'.$$

Die erste verwandelt, und die zweite substituirt, gibt die *Verwandlungsgleichung*

$$x + \downarrow y = e^{\downarrow\alpha}(x' + \downarrow y') = (x' + \downarrow y')(\cos.\ \alpha + \downarrow \sin.\ \alpha) \text{ oder}$$
$$x + \downarrow y = (x' \cos.\ \alpha - y' \sin.\ \alpha) + \downarrow(x' \sin.\ \alpha + y' \cos.\ \alpha);$$

gewöhnlich so geschrieben:

$$x = x' \cos.\ \alpha - y' \sin.\ \alpha$$
$$y = y' \cos.\ \alpha + x' \sin.\ \alpha.$$

§. 102.

Fortsetzung.

Gleichungen krummer Linien.

I. *Gleichungen der Parabel.* Fig. 19. Taf. II.

Nach der Erklärung der Parabel ist ihre charakteristische Gleichung $r = q$.

Die Bestimmungen des Punktes M durch $\overline{OFM}$, $\overline{OPM}$, $\overline{OQM}$ geben die Verwandlungsgleichungen

$$p + e^{\downarrow\varphi}r = \tfrac{1}{2}p + x + \downarrow y = \downarrow y + q.$$

Jene Gleichung mit diesen vereint machen das System der Gleichungen der Parabel aus, das leicht in die gewöhnlichen sich überführen lässt.

II. *Gleichungen der Ellipse und Hyperbel.* Fig. 20.

Charakteristische Gleichung beider Linien vermöge ihrer Erklärung: $r + r' = 2a$, worin r und r' bei der Ellipse einstimmig, bei der Hyperbel entgegengesetzt aggregirt werden.

Die Bestimmungen des Punktes M der Linie durch $\overline{OFM}$, $\overline{OF'M}$, $\overline{OPM}$ liefern die Verwandlungsgleichungen

$$-c + e^{\downarrow\varphi}r = c + e^{\downarrow(\pi-\varphi')}r' = x + \downarrow y.$$

Diese mit jener vereint machen das System der Gleichungen der Ellipse und Hyperbel aus, und dieses System gibt die gewöhnlichen Gleichungen

$$r = \frac{a^2-c^2}{a-c \cos.\ \varphi} \text{ und } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1,$$

oder

$$r = \frac{c^2-a^2}{c \cos.\ \varphi - a} \text{ und } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1.$$

Das erste Paar setzt $a > c$ voraus und gilt für die Ellipse,
„ zweite „ „ $a < c$ „ „ „ „ „ Hyperbel.

Bemerkung. Benützen wir diese Gelegenheit zu einer wichtigen Erläuterung der zum Theil entgegengesetzten, hier namentlich *halb* entgegengesetzten algebraischen Beziehungen von Grössen.

Vergleicht man die Gleichungen dieser zwei Linien, der Ellipse und Hyperbel, mit einander, so sieht man, dass sie ganz gleich gestaltet sind; nur wird der absolute Werth des Unterschiedes der zweiten Potenzen oder respective der Quadrate a^2 und c^2 in dem einen Paar Gleichungen addirt, im andern abgezogen. Will man demnach das eine Paar, z. B. nach dem üblichen Gebrauche jenes der Ellipse, für beide Linien verwenden; so würde man bloss, den Unterschied $a^2 - c^2$ jener zweiten Potenzen / Quadrate als eine gewisse Zahl / Figur d darstellend, $a^2 - c^2 = d$ setzen und darnach die Gleichungen

$$r = \frac{d}{a - c \cos. \varphi}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{d} = 1$$

beiden Linien zuschreiben können. Man würde dann von den algebraischen Rechnungsergebnissen der Ellipse auf die analogen der Hyperbel übergehen, indem man nur d in $-d$ verwandelt, und hinterher zur weiteren Vereinfachung der Rechnungsausdrücke wieder d durch $a^2 - c^2$ ersetzt. Folglich würde man die Aggregationsbeziehung von d in der Ellipse für positiv, in der Hyperbel für negativ anerkennen.

Allein, weil offenbar in vielen Rechnungen aus dem Unterschiede der zweiten Potenzen a^2 und c^2 die zweite Wurzel sich ziehen lassen muss; so findet man entschieden mehr Vortheil für die Rechnung darin, dass man den Unterschied dieser zweiten Potenzen auch als zweite Potenz einer Zahl b, oder den Unterschied der Quadrate a^2 und c^2 auch als Quadrat einer Seite b darstellt. Darum setzt man in der Ellipse $a^2 - c^2 = b^2$ und schreibt dann beiden Linien die Gleichungen zu

$$r = \frac{b^2}{a - c \cos. \varphi}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Soll man dann aus den algebraischen Rechnungsergebnissen der Ellipse jene der Hyperbel aufstellen; so kommt man damit leicht zu Stande, wo nur b^2 erscheint oder überhaupt geradzählige Potenzen von b vorhanden sind, da man hier nur die zweite Potenz von b negativ beziehlich zu nehmen, also anstatt b^2 bloss $-b^2$ in die Rechnung zu setzen hat. Allein, wo b auch vereinzelt oder in einer ungeradzähligen Potenz vorkommt, da kann man, weil nicht b selbst, sondern erst seine zweite Potenz, b^2, entgegengesetzt, negativ, zu aggregiren oder negativ beziehlich zu nehmen ist, b nicht in ganz, sondern nur in *halb* entgegengesetzter algebraischer oder Aggregationsbeziehung aufführen, also anstatt b nicht $-b$ oder $(-1)b$, sondern bloss $(-1)^{\frac{1}{2}}b$ oder $(\sqrt{-1})b$ oder $\downarrow b$ setzen.

Wenn nun hierbei die algebraische Beziehung des Zahlwerthes einer Strecke halb negativ oder transversiv sich ergibt, so *muss* darum noch keineswegs diese Strecke selbst die transverse (quere) oder senkrechte *Stellung* gegen die ihr in der Ellipse zukommende einnehmen; sondern so eine Strecke, wie sie gefordert wird, kann ja auch in der Hyperbel geradezu unmöglich*) sein, weil ein nicht absolutes, sondern relatives, negativ oder abweichend beziehliches, Rechnungsergebniss auf einen wirklichen Gegenstand zwar zuweilen hinweisen *kann*, aber nicht schon jederzeit hinweisen *muss*.

Z. B. Die Gliechung der *Ellipse* gibt $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, daher ist die Ordinate y so lange in der Weise, wie die zu Grunde gelegte Zeichnung voraussetzt, direct beziehlich und wirklich darstellbar, als *val. abs.* x nicht $>$ *val. abs.* a ist. Für die Hyperbel findet man, wenn man b durch $\downarrow b$ ersetzt, innerhalb derselben Grenzen der Abscisse x, die Ordinate $y = \pm \downarrow \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, also transversiv beziehlich, folglich gar nicht geometrisch nachweisbar oder darstellbar; weil in der Bestimmung $x + \downarrow y$ der Punkte der zu erforschenden Linie sowohl x als y (jede in ihrer Weise) direct beziehlich sein muss. Die nicht darstellbare transversive Beziehung der Ordinate der Hyperbel gibt demnach zu erkennen, dass von den auf der Hauptaxe der Hyperbel zwischen ihren Scheiteln aufstellbaren (unendlichen) senkrechten Geraden keine einzige, also auch nicht die durch den Mittelpunkt O gehende Nebenaxe, in die Hyperbel einschneiden kann.

Die Charakteristik des halben Gegensatzes der algebraischen Beziehung der Constante b in der Ellipse und Hyperbel besteht in Folgendem. Es ist

in der Ellipse $b^2 = a^2 - c^2 = (a + c)(a - c)$

„ „ Hyperbel $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$;

also ist in beiden Linien b die mittlere geometrische Proportionale der Summe und des Unterschiedes der halben Hauptaxe a und der halben Excentricität c (jedesmal das Kleinere vom Grösseren abgezogen gedacht). Um sie zu construiren, kann man mit den Halbmessern a und c concentrische Kreislinien, — etwa um den Mittelpunkt O der krummen Linie — beschreiben, und an die *innere* Kreislinie eine berührende Gerade bis an die äussere führen. Die beiden Hälften dieser durch den Berührungspunkt halbirten Sehne des äusseren Kreises sind sofort $+ b$ und $- b$. Bei dem Übergange von der Ellipse zur Hyperbel, von b zu $\downarrow b$, ändert sich also die Lage des der b zum Anfangspunkte dienenden Berührungspunktes dahin, dass dieser von der Kreislinie des Halbmessers a auf jene des Halbmessers c überspringt; was man am deutlichsten einsieht, wenn man sich die c, welche anfangs in der Ellipse $< a$ ist, nach und nach wachsen denkt, bis sie $= a$ und endlich in der Hyperbel $> a$ wird.

*) nicht etwa imaginär (einbildsam), weil ein wahrhaft Unmögliches, z. B. eine gerade oder viereckige Kreislinie, sich auch nicht einmal einbilden lässt, und ein Einbildsames nur scheinbar unmöglich ist.

§. 103.

Besondere Betrachtung der complexen Aggregate von Strecken.

Die einfachste Art der Aggregate von Strecken ergibt sich durch die einfachste Bestimmungsweise eines Punktes mittels einer gebrochenen Linie. Da muss die bestimmende gebrochene Linie möglichst wenig, nicht mehr als *zwei*, zusammensetzende Strecken oder Glieder, OP und PM, oder OQ und QM in Fig. 19 enthalten, und die Richtungen dieser müssen mit der Grundrichtung OX ausgezeichnete Winkel bilden, folglich die eine Strecke $OP = QM = x$ zur Grundrichtung parallel sein, also mit ihr den Winkel Null oder einen gestreckten Winkel π machen, die andere $PM = OQ = y$ aber auf der Grundrichtung senkrecht sein, mit ihr einen positiv oder negativ gelegenen und beziehlichen rechten Winkel, $\pm \frac{\pi}{2}$, bilden. In diesem Falle ist die erstere Strecke x direct (positiv oder negativ) beziehlich, die andere y dagegen (positiv oder negativ) transvers beziehlich, folglich das Aggregat dieser zwei Strecken complex, nämlich $= x + \downarrow y$.

Bekanntlich nennt man hierbei x und y die beiden rechtwinkligen Coordinaten, oder weil sie die gewöhnlichen sind, auch nur schlechthin die *Coordinaten* des Punktes M; x die *Abscisse*, y die *Ordinate*; O den *Ursprung* der Coordinaten oder der Abscissen, OX die Abscissen- und OY die Ordinatenaxe.

Verbindet man mit dieser Bestimmung durch rechtwinklige Coordinaten noch die durch eine einzige ablenkende Strecke OM, so nennt man den Ablenkungswinkel $MOX = \varphi$ und die Strecke $OM = r$ die *Polar-Coordinaten* desselben Punktes M; φ den *Polar-* oder auch *Elongationswinkel*, r den *Radiusvector*, O den *Pol*, OX die *Polaraxe*.

Um nicht wieder neue Benennungen zu schaffen, wollen wir die von G. W. von *Müller**) in seinem lesenswerthen Aufsatze in *Crelle's* Journal f. Math. Bd. 15, Heft 3, S. 229 gebrauchten Benennungen beibehalten. Jede vom Fixpunkte O zu dem, in Rücksicht auf ihn und auf die Grundrichtung, zu bestimmenden Punkte M sich hinziehende gerade oder gebrochene Linie, die man sich zur Erläuterung durch den Lauf eines beweglichen oder *beschreibenden* Punktes vom Fixpunkte O bis zu dem zu bestimmenden Punkte M entstanden denken kann, nennen wir überhaupt einen *Zug*, oder zur Unterscheidung einen *geraden* oder *gebrochenen* Zug von O nach M, den geraden $\overline{OM}$ auch den *Radiusvectorzug* und den zweigliedrigen rechtwinklig gebrochenen $\overline{OPM}$ den *Coordinatenzug*.

Jede complexe Zahl $x + \downarrow y$ kann demnach am einfachsten durch einen Coordinatenzug $\overline{OPM}$ oder $\overline{OQM}$ vorgestellt werden, dessen Abscisse $OP = QM$ durch das erste direct beziehliche Glied x, und die Ordinate $PM = OQ$ durch das zweite transversiv beziehliche Glied y der Länge und Richtung nach bestimmt wird. Man schreitet gewisser Massen vom Fixpunkte O aus zuerst geradeaus (direct) vor- oder rückwärts auf der $X'X$

*) der als k. hannoverauischer Major verstorben ist.

die Strecke x ab, und nachher senkrecht (transversiv, quer) mit einer Halbrechts- oder Halblinkswendung noch um y weiter.

§. 104.

Fortsetzung.

Einem solchen Coordinatenzuge $\overline{OPM} = \overline{OQM} = x + \downarrow y$ gilt ein gerader oder Radiusvectorzug $\overline{OM}$ gleich, welcher um den Polarwinkel φ von der Grundrichtung oder von der positiven Richtung der x ablenkt und die Länge $\overline{OM} = r$ besitzt, und daher durch $c^{\downarrow\varphi} r$ vorgestellt werden kann; nämlich es ist

$$c^{\downarrow\varphi} r = x + \downarrow y.$$

Und hiernach hat man wie früher (§. 100, III) zum Übergange vom Radiusvectorzug auf den Coordinatenzug die Gleichungen

$$x = r\ cos.\ \varphi,\quad y = r\ sin.\ \varphi,$$

und umgekehrt zum Übergange vom Coordinatenzuge auf den Radiusvectorzug die Gleichungen

$$r^2 = x^2 + y^2,\quad cos.\ \varphi = \frac{x}{r},\ sin.\ \varphi = \frac{y}{r},\ tang.\ \varphi = \frac{y}{x}.$$

Der *Radiusvector* r hat also zu seinem Zahlwerthe den Modul *val. abs.* $\sqrt{x^2 + y^2}$ der complexen Zahl $x + \downarrow y$.

§. 105.

Fortsetzung.

Am einfachsten lässt sich eine complexe *ganze* Zahl $x + \downarrow y$, oder auch ein Bruch, dessen Zähler eine solche Zahl ist, durch einen Coordinatenzug darstellen. Man stellt nämlich das von den Gliedern x und y dieser Zahl Gezählte — sei es ein Ganzes oder ein aliquoter Theil eines Ganzen — durch eine beliebige Strecke, genannt *Längeneinheit*, dar, trägt auf zwei winkelrechten Axen XX und YY in Fig. 21 aus ihrem *Durchschnittspunkte* O auf der *Hauptaxe* $X'X$ für die Darstellung von x, und auf der *Nebenaxe* $Y'Y$ für die Darstellung von y, nach beiden entgegengesetzten Richtungen — nach der positiven und nach der negativen — diese Längeneinheit beliebig oft auf, und führt durch alle sich ergebenden Auftragepunkte einer jeden Axe Parallelen zur anderen Axe. Auf diese Weise wird jede solche Parallellinie von den auf ihr senkrechten, zur anderen Axe parallelen Geraden in lauter gleichweit, nämlich um eine Längeneinheit, von einander abstehenden Punkten durchschnitten, deren jeder durch einen Coordinatenzug $x + \downarrow y$ bestimmt wird.

Schreitet oder zählt man nämlich vom *Nullpunkte* oder dem *Ursprunge* O beider Axen zuerst auf der directen oder Hauptaxe, jenachdem die Beziehung der x positiv oder negativ ist, nach der positiven oder negativen Richtung dieser Hauptaxe, x Längeneinheiten, und dann auf der zur transversen oder Nebenaxe parallelen Geraden, je nachdem y positiv oder negativ transversiv bezogen ist, nach der positiven oder negativen Richtung der Nebenaxe, y Einheiten, oder zuerst auf der Nebenaxe diese y und dann parallel zur Haupt-

axe jene x Längeneinheiten ab; so gelangt man beide Male zu den durch den Coordinatenzug $x + \downarrow y$ bestimmten Punkt.

Z. B. In Fig. 21 zählt man zur Darstellung von $+ 3 + \downarrow 2$ erst aus O bis A vorwärts 3, dann links 2, und bleibt bei dem Punkte B stehen; also wird die complexe ganze Zahl $+ 3 + \downarrow 2$ durch den Coordinatenzug $\overline{OAB}$ dargestellt. Eben so wird
$- 4 + \downarrow 5$ durch den Zug $\overline{OGH}$, dagegen
$- 4 - \downarrow 5$ » » » $\overline{OGL}$ repräsentirt. Wir schreiben das kurz so:

$$+ 3 + \downarrow 2 = \overline{OAB}, \quad - 4 + \downarrow 5 = \overline{OGH}, \quad - 4 + \downarrow 5 = \overline{OGL}.$$

§. 106.

Aggregation complexer Zahlen.

I. Sollen mehrere complexe Zahlen

$$x + \downarrow y, \quad x' + \downarrow y', \quad x'' + \downarrow y'', \ldots,$$

zu einander *addirt* werden, so wird man bloss die sie repräsentirenden Coordinatenzüge zu einander addiren, d. i. jeden folgenden Zug an den nächst vorhergehenden so mit Beibehaltung der Richtungen seiner Glieder anschliessen, dass immer der folgende dort anfängt, wo der frühere aufhört. Die Summe

$$(x + \downarrow y) + (x' + \downarrow y') + (x'' + \downarrow y'') + \ldots$$

oder

$$x + \downarrow y + x' + \downarrow y' + x'' + \downarrow y'' + \ldots$$

wird demnach von einem durchgängig winkelrecht gebrochenen Zuge vorgestellt.

Sind z. B. die complexen ganzen Zahlen

$$3 + \downarrow 2, \quad 2 + \downarrow 4, \quad - 6 - \downarrow 3$$

zu addiren, so wird man die sie vorstellenden Züge

$$\overline{OAB}, \quad \overline{BCD}, \quad \overline{DEF}$$

an einander anschliessen und die Summe

$$3 + \downarrow 2 + 2 + \downarrow 4 - 6 - \downarrow 3$$

durch den gebrochenen Zug $\overline{OABCDEF}$ darstellen.

Weil man in jener Summe die Glieder, und in diesem gebrochenen Zuge die Strecken beliebig auf einander folgen lassen kann (§. 95); so lässt sich die Summe auch complex als

$$(x + x' + x'' + \ldots) + \downarrow (y + y' + y'' + \ldots)$$

darstellen, und der gebrochene Zug durch einen Coordinatenzug sich ersetzen.

So wird obige Summe $= (3 + 2 - 6) + \downarrow (2 + 4 - 3) = - 1 + \downarrow 3$, und der Zug

$$\overline{OABCDEF} = \overline{O1F}.$$

Eben so ist

$$(-4-\downarrow 5)+(0+\downarrow 10)+(-2-\downarrow 2)+(5+\downarrow 0)$$
$$=\overline{OGL}+\overline{LH}+\overline{HIK}+\overline{KF}=\overline{OGLHIKF},$$

und reducirt

$$=-4-2+5+\downarrow(-5+10-2)=-1+\downarrow 3=\overline{O1F}.$$

II. Ist demnach eine complexe Zahl zu *subtrahiren*, folglich mit entgegengesetzt beziehlich genommenen Gliedern zu addiren, so wird man auch den sie vorstellenden Coordinatenzug subtrahiren, folglich ihn an den, den Minuend vorstellenden, Zug mit entgegengesetzten Richtungen seiner beiden Glieder anhängen.

Denn es ist $(x+\downarrow y)-(x'+\downarrow y')=(x+\downarrow y)+(-x'-\downarrow y')$.

Z. B. Soll von $(-1+\downarrow 3)$ abgezogen werden $(-6-\downarrow 3)$, so wird man an den Zug $\overline{O1F}=-1+\downarrow 3$ anschliessen den Zug $+6+\downarrow 3$ oder $+\downarrow 3+6=\overline{FED}$, wonach man auf den Punkt D trifft, dem der Coordinatenzug $\overline{O5D}=5+\downarrow 6$ zukommt. Man hat daher im Zusammenhange

$$(-1+\downarrow 3)-(-6-\downarrow 3)=(-1+\downarrow 3)+(6+\downarrow 3)=\overline{O1F}+\overline{FED}=$$
$$=-1+6+\downarrow(3+3)=5+\downarrow 6=\overline{O1FED}=\overline{O5D}.$$

Jede Subtraction algebraisch beziehlicher Grössen kann also jederzeit durch die Addition der entgegengesetzt bezogenen Grössen ersetzt werden.

III. Weil jeder Radiusvectorzug $e^{\downarrow\varphi}r$ durch einen Coordinatenzug $x+\downarrow y=r\cos.\varphi+\downarrow r\sin.\varphi$ ersetzt werden kann, so lässt sich auch eine jede Summe solcher Radiusvectorzüge, d. i. ein gebrochener Zug, durch die Summe der ihnen gleichen Coordinatenzüge ersetzen; es ist nämlich, wenn das Zeichen Σ wie üblich die Summirung analoger Grössen andeutet,

$$\Sigma\, e^{\downarrow\varphi}r=\Sigma\,(r\cos.\varphi+\downarrow r\sin.\varphi).$$

Die letztere Summe kann endlich wieder durch einen einzigen Coordinatenzug vertreten werden, also lässt sich auch jeder gebrochene Zug in einen Coordinatenzug verwandeln; man hat nämlich

$$\Sigma\, e^{\downarrow\varphi}r=\Sigma\, r\cos.\varphi+\Sigma\, r\sin.\varphi.$$

In der Zeichnung braucht man zu diesem Zwecke bloss durch den Anfangspunkt des gebrochenen Zuges die $\begin{matrix}\text{Parallele,}\\ \text{Senkrechte,}\end{matrix}$ und durch den Endpunkt die $\begin{matrix}\text{Senkrechte}\\ \text{Parallele}\end{matrix}$ zur Grundrichtung zu führen.

§. 107.

Zeichnende Darstellung des Multiplicirens ablenkend beziehlicher Grössen.

Der einfachste Fall des Multiplicirens zweier Zahlen a, und b mit einander, wenn ihre Beziehungen nur entweder direct oder transversiv sind, lässt sich sehr leicht zeichnend darstellen, indem man auf den Satz: „Der Flächeninhalt (Zahlwerth) eines Rechteckes gleicht

dem Producte der Zahlwerthe zweier zusammenstossenden Seiten desselben," sich stützend, die Zahlen a und b durch die Seiten, und das Product durch die Fläche eines Rechteckes darstellt.

Denkt man sich nun in einem Paar Scheitelwinkel zweier auf einander senkrechten Geraden AA' und BB' in Figur 22 beliebige Grenzlinien AB' und $A'B$ in hinreichend grossem Abstande von dem Kreuzungspunkte O der Geraden gezogen; so entstehen zwei Scheitelfiguren $OAB'O = F'$ und $OA'BO = F''$, welche als die beiden nur an der Spitze O zusammenhängenden Bestandtheile der einen ganzen Figur $OAB'OA'BO = F$ angesehen werden können und sollen, so dass diese eigentlich zu betrachtende Figur $F = F' + F''$ ist. Auch kann man diese Figur F als ein *zusammenhängendes* Ganzes darstellen, wenn man in Fig. 22. die punktirten Grenzlinien nimmt, wo $F = OABOA'B'O$ ist.

Werden nachher auf die Richtungen OA und OA' die Seiten $+a$ und $-a$
und „ „ „ OB „ OB' „ „ $+b$ „ $-b$
aufgetragen, und die Rechtecke 1, 2, 3, 4
construirt; so fügen (addiren) sich 1 und 3 an die Figur F hinzu,
dagegen trennen (subtrahiren) „ 2 „ 4 von der „ „ los;
daher werden, bei der Bestimmung der Gesammtfläche, die zwei Paar Rechtecke verschiedentlich aggregirt. Sieht man
nunmehr das Addirtwerden oder das Sichanschliessen als die positive Beziehung,
folglich „ Subtrahirtwerden „ „ Sichlostrennen „ „ negative „
eines solchen Rechteckes an, dessen Flächeninhalt jedesmal $a \cdot b = p$ ist; so verbildlicht

das Rechteck 1 den Satz: $+a \cdot +b = +p$
„ „ 2 „ „ $-a \cdot +b = -p$
„ „ 3 „ „ $-a \cdot -b = +p$
„ „ 4 „ „ $+a \cdot -b = -p$.

Denkt man sich nunmehr das System dieser vier Rechtecke um einen *rechten Winkel* von rechts nach links so gedreht, dass die Seite $+a$ von der OA auf die OB übergeht, so werden die Beziehungen aller Rechtecksseiten in Vergleich mit ihren früheren Beziehungen transversiv, und sonach verdeutlicht

das Rechteck 5 den Satz: $+\downarrow a \cdot +\downarrow b = -p$
„ „ 6 „ „ $-\downarrow a \cdot +\downarrow b = +p$
„ „ 7 „ „ $-\downarrow a \cdot -\downarrow b = -p$
„ „ 8 „ „ $+\downarrow a \cdot -\downarrow b = +p$.

§. 108.

Fortsetzung.

Multiplication complexer ganzer Zahlen.

Besehen wir, indem wir uns vornehmen, das Multipliciren einer complexen Grösse mit einer complexen Zahl zu construiren, zuerst den leicht verständlichen, auf blosses Abzählen hinauslaufenden Fall, wo die Factoren ganze Zahlen sind.

I. *Ist eine complexe Anzahl, z. B.* + 4 — ↓ 2, *mit einer absoluten, z. B.* 3, *zu multipliciren,* so heisst diess, man solle gerade so, wie man + 4 — ↓ 2 zählte, nämlich 4 vorwärts und 2 rechts, von da an, wo man stehen geblieben war, noch weiter ein 2tes und ein 3tes Mal zählen. Es ist also das Product

$$(4 - \downarrow 2) . 3 = (4 - \downarrow 2) + (4 - \downarrow 2) + (4 - \downarrow 2) = 4 . 3 - \downarrow 2 . 3 = 12 - \downarrow 6$$
$$= \overline{OAB} . 3 = \overline{OAB} + \overline{BCD} + \overline{DEF} = \overline{O(12)} - \downarrow \overline{(12)F} = \overline{O(12)F},$$

in Fig. 23.

Anstatt 4 vorwärts (+ 4) von O bis A, und 2 rechts (— ↓2) von A bis B zu zählen, kann man auch schräg von O nach B zählen. Folglich kann man anstatt jene rechtbrüchige Zählweise 3mal auszuführen, diese schräge, nach ihrer Richtung OB, 3mal vollziehen. Auch so schräg zählend kommt man wieder nach F.

II. *Soll eine complexe Anzahl,* + 4 — ↓2, *mit einer* **positiv** *beziehlichen,* + 3, *multiplicirt werden,* so gibt die positive Beziehung des Multiplicators 3 zu erkennen, dass man die Zählung des Multiplicands + 4 — ↓2 genau in *derselben* Art, wie sie zu Stande kam, 3mal nach einander wiederhole; mithin ist eben so vorzugehen, wie vorhin in I., wo der Multiplicator beziehungslos war.

Ist dagegen *mit einer* **negativ** *beziehlichen Anzahl,* — 3, *zu multipliciren,* so lässt die negative Beziehung des Multiplicators 3 erkennen, dass man die Zählung des Multiplicands, + 4 — ↓2, in der *entgegengesetzten* Weise oder Richtung, als in der die zu Stande kam, 3mal nach einander wiederhole. Mithin hat man nicht wie das + vor 4 ansagt, vorwärts, sondern rückwärts bis auf 4; und nachher, nicht wie das — vor ↓2 angibt, rechts, sondern links 2 zu zählen. Oder anders: Anstatt von 0 (Null, dem Nullpunkte), wo man sich stehen denkt, nach + zu schauen, macht man vorerst Rechtsum, so dass man nun nach — schaut; und nun erst, nachdem man dem — des Multiplicators, — 3, Genüge geleistet, zählt man so wie der Multiplicand vorschreibt, vorwärts schreitend, 4, und rechts gewendet, 2, dreimal nach einander, also in Fig. 23 von O über a bis b, von b über c bis d, und von d über e bis f. Sonach ist

$$(+ 4 - \downarrow 2)(- 3) = (- 4 + \downarrow 2) 3 = - 4 . 3 + \downarrow 2 . 3 = - 12 + \downarrow 6$$
$$= \overline{OAB} . (- 3) = \overline{Oab} . 3 = \overline{Oab} + \overline{bcd} + \overline{def} = \overline{O(12)f}.$$

Auch kann man, anstatt schräg von O nach B, wie in I, zu zählen, in der dieser OB entgegengesetzten Richtung von O über b und d nach f dreimal die OB abzählen.

III. *Ist eine complexe Anzahl,* + 4 — ↓2, *mit einer transversiv beziehlichen,* ± ↓2, *zu multipliciren,* so gibt die transversive Beziehung des Multiplicators an, man solle, wenn man von 0 nach + schaut, sich, je nachdem diese Beziehung positiv oder negativ transversiv ist, vorerst mit einer Halblinks- oder Halbrechtswendung in die Richtung von 0 nach + ↓ oder nach — ↓ stellen, und nun die Zählung, wie sie der Multiplicand vorschreibt, nach der früher erklärten Weise vorwärts und seitwärts ausführen. Dadurch beschreibt man in Fig. 23 entweder einen der aus Coordinatenzügen zusammengesetzten gebrochenen Züge $\overline{OABCD}$, $\overline{Oabcd}$, oder einen der schrägen geraden Züge $\overline{OBD}$, $\overline{Obd}$. Sonach findet man

$$(+ 4 - \downarrow 2) . (+ \downarrow 2) = + \downarrow 4 . 2 + 2 . 2 = + \downarrow 8 + 4 = \overline{O\mathfrak{BD}},$$

$$(+ 4 - \downarrow 2) . (- \downarrow 2) = - \downarrow 4 . 2 - 2 . 2 = - \downarrow 8 - 4 = \overline{O\mathfrak{bd}}.$$

IV. *Sind endlich zwei complexe Anzahlen,* $+ 4 - \downarrow 2$ und $+ 3 - \downarrow 2$, *mit einander zu multipliciren*, so wird man den Multiplicand $+ 4 - \downarrow 2$ zuerst mit dem direct beziehlichen Gliede, $+ 3$, nach II, und dann mit dem transvers beziehlichen, $- \downarrow 2$, nach III multipliciren. Durch die erste Multiplication kommt man von O über B nach D und F, und durch die zweite Multiplication, nachdem man sich rechts gewendet, von F über H nach K. Auf diese Weise findet man in Fig. 24

$$(+ 4 - \downarrow 2) (+ 3 - \downarrow 2) = (- 4 + \downarrow 2) (- 3 + \downarrow 2) = + 8 - \downarrow 14 = \overline{OFK}$$
$$(+ 4 - \downarrow 2) (+ 3 + \downarrow 2) = (- 4 + \downarrow 2) (- 3 - \downarrow 2) = + 16 + \downarrow 2 = \overline{OFK'}$$
$$(+ 4 - \downarrow 2) (- 3 - \downarrow 2) = (- 4 + \downarrow 2) (+ 3 + \downarrow 2) = - 16 - \downarrow 2 = \overline{Ofk'}$$
$$(+ 4 - \downarrow 2) (- 3 + \downarrow 2) = (- 4 + \downarrow 2) (+ 3 - \downarrow 2) = - 8 + \downarrow 14 = \overline{Ofk}$$
$$(+ 4 + \downarrow 2) (+ 3 + \downarrow 2) = (- 4 - \downarrow 2) (- 3 - \downarrow 2) = + 8 + \downarrow 14 = \overline{O\mathfrak{FK}}$$
$$(+ 4 + \downarrow 2) (+ 3 - \downarrow 2) = (- 4 - \downarrow 2) (- 3 + \downarrow 2) = + 16 - \downarrow 2 = \overline{O\mathfrak{FK}'}$$
$$(+ 4 + \downarrow 2) (- 3 - \downarrow 2) = (- 4 - \downarrow 2) (+ 3 + \downarrow 2) = - 8 - \downarrow 14 = \overline{O\mathfrak{fk}}$$
$$(+ 4 + \downarrow 2) (- 3 + \downarrow 2) = (- 4 - \downarrow 2) (+ 3 - \downarrow 2) = - 16 + \downarrow 2 = \overline{O\mathfrak{fk}'}.$$

Eben so zeichnen in Fig. 23 die punktirten Züge die Producte

$$(+ 3 + \downarrow 2) (+ 3 - \downarrow 2) = (- 3 - \downarrow 2) (- 3 + \downarrow 2) = 9 + 4 = 13$$
$$(+ 3 - \downarrow 2) (+ 3 + \downarrow 2) = (- 3 + \downarrow 2) (- 3 - \downarrow 2) = 9 + 4 = 13$$

zweier conjugirter complexer Anzahlen.

§. 109.

Fortsetzung.

Multiplication beliebiger complexer Zahlen.

Sei eine complexe Grösse $a + \downarrow b$ mit einer complexen Zahl $\alpha + \downarrow \beta$ zu multipliciren. Man stelle die Glieder des Multiplicands, a und b, durch die ihnen proportionalen Strecken OA und OB in Fig. 25 vor, welche man nach Massgabe der algebraischen Beziehungen von a und b auf die Grundrichtung OX, und darauf senkrecht aufträgt, und so den Coordinatenzug $\overline{OAB} = a + \downarrow b$ construirt. Diesen Coordinatenzug nun multiplicire man mit den Zahlen α und β, d. h. man zeichne (verkleinernd oder vergrössernd) ihn in den Massen oder Verhältnissen $1 : \alpha$ und $1 : \beta$.

Zu diesem Zwecke trage man auf einer beliebigen durch O gehenden Geraden $Z'OZ$ zuerst die durch 1 (Eins) vorzustellende Längeneinheit von O nach 1, und dann von O nach α und β Längen auf, deren Verhältnisse zur Längeneinheit die Zahlen α und β sind, so dass $O1 = 1$, $O\alpha = \alpha$, $O\beta = \beta$ gesetzt werden kann. Dann ziehe man, um $OA = a$ zu multipliciren, die Gerade $A1$, und zu ihr durch die Punkte α und β die αC und βK ||;

Sofort ist $\qquad O1 : O\alpha : O\beta = OA : OC : OK$
also auch $\qquad 1 : \alpha : \beta = a : OC : OK,$
folglich $\qquad OC = \alpha a, \quad OK = \beta a.$

Um noch $AB = b$ zu multipliciren, führe man die Gerade OB und durch C und K zur AB || die CD und KL. Dann ist

$$AB : CD : KL = OA : OC : OK = O1 : O\alpha : O\beta$$

oder $\qquad b : CD : KL = 1 : \alpha : \beta$
daher $\qquad CD = \alpha b, \quad KL = \beta b.$

Hat man hierbei die Längeneinheit $O1 = 1$ so aufgetragen, dass ihre Richtung $O1$ mit der Grundrichtung OX einen spitzen Winkel bildet, und hat man die Strecken $OA = a$, $AB = b$, $O\alpha = \alpha$, $O\beta = \beta$; mit Rücksicht auf ihre algebraischen Beziehungen, auf die Axen $X'X$, $Z'Z$ und senkrecht auf die erstern aufgetragen; so hat der Coordinatenzug $\overline{OCD} = \alpha a + \downarrow \alpha b$ bereits seine rechte Stellung. An ihn schliesst man sonach in seinem Endpunkte D, durch den man eine zur Grundrichtung einstimmig ||e Richtung DX' zieht, den Zug $\overline{OKL} = \beta a + \downarrow \beta b$ an, indem man ihn vorerst zu seiner Lage || sich vorstellt, und nachher ihn aus der Richtung DX' um einen rechten Winkel, nach der Seite der positiv ablenkenden Winkel hin, hinausdreht. Hat man jedoch auf die Beziehungen von a, b, α, β keinen Bedacht genommen, so muss man die Coordinatenzüge $\overline{OCD}$ und $\overline{OKL}$ noch in ihre richtige Lage bringen und in D an einander hängen. Danach erhält man, je nachdem β positiv oder negativ transvers beziehlich ist, für das Product den rechtbrüchigen Zug $\overline{OCDEF}$ oder $\overline{OCDE'F'}$, also

$$(a + \downarrow b)(\alpha + \downarrow \beta) = (\alpha a - \beta b) + \downarrow(\alpha b + \beta a) = \overline{OCDEF} = \overline{ODF}$$
$$(a + \downarrow b)(\alpha - \downarrow \beta) = (\alpha a + \beta b) + \downarrow(\alpha b - \beta a) = \overline{OCDE'F'} = \overline{ODF'}.$$

§. 110.

Fortsetzung.

Multiplication einer Summe wie immer ablenkend beziehlicher Grössen mit einer Summe wie immer ablenkend beziehlicher Zahlen.

Man stelle den Multiplicand, jene zu multiplicirende Summe von wie immer ablenkend beziehlichen *Grössen*, durch einen gebrochenen Zug T dergestalt dar, dass die Strecken des Zuges die Glieder der Summe, und die Winkel dieser Strecken mit der Grundrichtung die Ablenkungen der algebraischen Beziehungen der Summen vorstellen. Ist nun der Multiplicator eine eben solche Summe beliebig ablenkend beziehlicher *Zahlen*, wie

$$e^{\downarrow\alpha}a + e^{\downarrow\beta}b + e^{\downarrow\gamma}c + e^{\downarrow\delta}d + \ldots,$$

wo a, b, c, d, ... absolut gedacht sind; so multiplicire man jenen Zug T, den Multiplicand, mit diesen Absolutzahlen a, b, c, d, ..., d. h. man zeichne (verjünge oder ver-

grössere*) diesen Zug in den Massen oder Verhältnissen $1:a,\ 1:b,\ 1:c,\ 1:d,\ \ldots$, so dass man auf diese Weise die dem Zuge T parallel gestellten und mit ihm in einerlei Punkt anfangenden ähnlichen Züge

$$aT,\ bT,\ cT,\ dT,\ \ldots$$

erhält.

Nunmehr gebe man dem Zuge aT seine richtige Ablenkung, indem man, seinen Anfangspunkt beibehaltend, seine Grundrichtung — und damit jede Strecke desselben — aus ihrer ursprünglichen Lage um den Winkel α schwenkt. Auf den Endpunkt des nun richtig gestellten Zuges aT bringe man den Anfangspunkt des folgenden Zuges bT, und lasse seine Grundrichtung aus ihrer ursprünglichen Lage um den Winkel β ablenken. Und auf dieselbe Weise schliesse man auch jeden folgenden Zug, cT, dT, ..., an den nächst vorher festgelegten Zug, und schwenke seine Grundrichtung aus ihrer ursprünglichen Lage um den gehörigen Ablenkungswinkel γ, δ, ... heraus**). Dann muss, wenn alle Züge in ihrer richtigen Ablenkung an einander gehängt worden sind, der aus ihnen zusammengestellte gebrochene Zug das geforderte Product

$$T\,(e^{\sqrt{}\alpha}a + e^{\sqrt{}\beta}b + e^{\sqrt{}\gamma}c + e^{\sqrt{}\delta}d + \ldots)$$
$$= e^{\sqrt{}\alpha}a\,T + e^{\sqrt{}\beta}b\,T + e^{\sqrt{}\gamma}c\,T + e^{\sqrt{}\delta}d\,T + \ldots \text{ darstellen.}$$

Zur Erläuterung dienen die Figuren 26[a] und 26[b].

§. 111.

Schluss.

Einfachste Ausführung.

Am einfachsten stellt man das Multipliciren einer Summe beliebig ablenkend beziehlicher Grössen mit einer Summe wie immer ablenkend beziehlicher Zahlen graphisch in folgender Weise dar. Man repräsentirt, nachdem man eine bestimmte Längeneinheit festgesetzt hat, den Multiplicand durch einen gebrochenen Zug $\mathfrak{A}$, und ersetzt ihn durch den ihm gleichgeltenden, von seinem Anfangspunkte O — dem Fixpunkte — zu seinem Endpunkte A hinlaufenden geraden Zug $e^{\sqrt{}\alpha}a = \overline{OA}$ in Fig. 27. Die Richtung dieses Zuges nimmt man zur Grundrichtung für den gebrochenen Zug $\mathfrak{B}$, durch welche man den Multiplicator, in Bezug auf dieselbe Längeneinheit, vorstellig macht, und ersetzt auch ihn durch den ihm gleichgeltenden geraden Zug $e^{\sqrt{}\beta}b = \overline{OB}$.

*) etwa mit dem Pantographen.

**) Man kann sich zu diesem Zwecke bei dem wirklichen Zeichnen den Zug T mit den ihm ähnlichen Zügen aT, bT, cT, dT, ... und mit neuen Grundrichtungen, von denen die den Zügen gemeinschaftliche Grundrichtung um die Winkel α, β, γ, δ, ... ablenkt, auf ein durchscheinendes Papier zeichnen, und sie von diesem auf ein anderes mittels richtigen Auflegens und Abstechens (Piquirens) übertragen und an einander anschliessen.

Um nun den Zahlwerth a des den Multiplicand vorstellenden geraden Zuges $\overline{OA}$ mit dem Zahlwerthe b des den Multiplicator vorstellenden geraden Zuges $\overline{OB}$ zu multipliciren, trägt man auf OA aus O bis 1 die Längeneinheit 1 auf, zieht die Strecke $1B$ und führt zu ihr || durch A die AB', und sofort ist $OB' = OB \cdot \frac{OA}{O1} = b(a:1) = ab$. Darnach stellt der gerade Zug $\overline{OB'}$, dessen Länge $= ab$ ist, und dessen Richtung von der Grundrichtung OX um den Winkel $\alpha + \beta$ ablenkt, das Product $\mathfrak{AB}$ der gebrochenen Züge $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, oder das Product $e^{\downarrow\alpha}a \,.\, e^{\downarrow\beta}b$ der geraden Züge $e^{\downarrow\alpha}a$ und $e^{\downarrow\beta}b$ vor, oder es ist

$$\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B} = e^{\downarrow\alpha}a \,.\, e^{\downarrow\beta}b = e^{\downarrow(\alpha+\beta)}ab = \overline{OB'}.$$

Hat man noch mehr Multiplicatoren, so stellt man auch sie durch gebrochene Züge $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, . . . dar, indem man jedesmal die Richtung des, den nächst vorhergehenden Factor vorstellenden geraden Zuges zur neuen Grundrichtung nimmt. Hierauf führt man zu den Endpunkten dieser Züge die geraden Züge $e^{\downarrow\gamma}c$, $e^{\downarrow\delta}d$, ... und zeichnet in der so eben beschriebenen Weise die Multiplication mit diesen nach einander folgenden Multiplicatoren; so dass man erhält

$$\mathfrak{ABC} = e^{\downarrow\alpha}a \,.\, e^{\downarrow\beta}b \,.\, e^{\downarrow\gamma}c = e^{\downarrow(\alpha+\beta+\gamma)}abc = \overline{OC'}$$

$$\mathfrak{ABCD} = e^{\downarrow\alpha}a \,.\, e^{\downarrow\beta}b \,.\, e^{\downarrow\gamma}c \,.\, e^{\downarrow\delta}d = e^{\downarrow(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}abcd = \overline{OD'}, \quad \text{u. s. f.}$$

§. 112.

Zeichnende Darstellung des Dividirens ablenkend beziehlicher Grössen.

Da das Dividiren der Rückschritt vom Multipliciren, nämlich das Aufsuchen eines Factors — des Quotienten — aus dem Producte — dem Dividende — und aus dem anderen Factor — dem Divisor — ist; so lassen sich aus obiger umständlich erörterten Darstellung des Multiplicirens ablenkend beziehlicher Grössen und Zahlen leicht die Regeln des Dividirens derselben herleiten.

1. *Beispiel.* Bei der Division $(12 - \downarrow 6) : (\pm 3)$

stellt man (Fig. 23) den Dividend $12 - \downarrow 6$ durch $\overline{O(12)F}$ dar, theilt OF in 3 gleiche Theile $OB = BD = DF$. Treffen solche Theilungspunkte, wie hier, mit Kreuzungspunkten zusammen, so ist der Quotient abermals eine ganze Zahl; also ist er entweder $= + 4 - \downarrow 2 = \overline{OAB}$ oder $= - 4 + \downarrow 2 = \overline{Oab}$.

2. *Beispiel.* Ist $+ 8 - \downarrow 14$ durch $+ 4 - \downarrow 2$ zu theilen, so stellt man (Fig. 24) den Dividend durch $\overline{O8K}$ und den Theiler durch $\overline{OAB}$ vor; zieht dann OB und durch K darauf senkrecht KF. Sonach zeigt sich $OF = 3 \,.\, OB$, $FK = 2 \,.\, OB$, also ist der Quotient $= + 3 - \downarrow 2$.

3. *Beispiel.* Bei der Theilung überhaupt construirt man (Fig. 27) erst den, den Dividend $\mathfrak{AB}$ vorstellenden, geraden Zug $\overline{OB'}$, trägt darauf den Zahlwerth b des Divisors

𝔅 $= e^{\downarrow\beta}b$ von O bis B, legt daran den Winkel β entgegengesetzt an, um die Richtung OA, des den Quotienten vorstellenden geraden Zuges und so ihren Ablenkungswinkel $AOX = \alpha$ zu erhalten. Auf ihm schneidet man die Längeneinheit von O bis 1 ab, zieht $B1$ und dazu $\| B'A$. Dann gibt OA den Zahlwerth a und der gerade Zug $\overline{OA} = e^{\downarrow\alpha}a$ den ganzen graphischen Ausdruck des Quotienten 𝔄. (Vergl. §. 111.)

4. *Beispiel.* Hieraus ergibt sich zugleich, wie man das Umgekehrte von $e^{\downarrow\alpha}a$ construirt. Man trägt nämlich auf die Grundrichtung OX von O aus (in Fig. 27) die a und 1 auf, legt daran den Winkel $-\alpha$, schneidet auf dessen Schenkel wieder 1 ab, zieht $a1$ und $1h \| a1$. Dann ist der Zug $\overline{Oh} = e^{-\downarrow\alpha}\frac{1}{a} = 1 : e^{\downarrow\alpha}a$ das Umgekehrte von $e^{\downarrow\alpha}a$.

§. 113.

Zeichnende Darstellung des Potenzirens ablenkend beziehlicher Zahlen nach ganzzahligen Exponenten.

I. *Ist der Exponent eine absolute oder eine positiv beziehliche ganze Zahl*, so kommt das Potenziren einer Zahl mit dem wiederholten Multipliciren, d. i. mit der Aufstellung des Productes so vieler, mit dem Potentiand identischer, Factoren überein, als der Exponent vorzählt. Mithin können die Regeln zur zeichnenden Darstellung des Potenzirens leicht aus jenen fürs Multipliciren aufgestellten abgeleitet werden.

1ter Fall. *Ist der Potentiand nur einfach und direct oder transversiv beziehlich*, $\pm a$, $\pm \downarrow a$, so wird man in §. 107 bloss $b = a$ machen, folglich die *zweite Potenz* als *Quadrat* dargestellt erhalten.

2ter Fall. *Ist der Potentiand eine complexe* **ganze Zahl**, $-3 + \downarrow 2$; so erhält man seine nach einander folgenden Potenzen, die 2te, 3te, 4te, u. s. f., indem man ihn wiederholt, gemäss §. 108, IV., mit sich selbst multiplicirt. So z. B. wird

$$(+2 - \downarrow 3)^2 = 4 - \downarrow 12 - 9 = -5 - \downarrow 12$$

durch den Zug $\overline{OLM}$ in Fig. 24 bestimmt.

3ter Fall. *Allgemein, wenn der Potentiand was immer für eine algebraisch beziehliche Zahl* $e^{\downarrow\alpha}a$ ist, stellt man ihn durch den geraden Zug $\overline{Oa}$ in Fig. 28 dar, beschreibt um O mit a und mit der Längeneinheit 1 (concentrische) Kreislinien, trägt den Winkel α mittels des von ihm bestimmten Kreisbogens wiederholt auf, und vollbringt nach §. 111 die in Fig. 28 ausgewiesene Zeichnung, um nach und nach die natürlich aufsteigenden Potenzen von $e^{\downarrow\alpha}a$ zu erhalten,

$$(e^{\downarrow\alpha}a) = \overline{Oa}\,,\quad (e^{\downarrow\alpha}a)^2 = e^{\downarrow 2\alpha}a^2 = \overline{O(a^2)}$$

$$(e^{\downarrow\alpha}a)^3 = e^{\downarrow 3\alpha}a^3 = \overline{O(a^3)}$$

$$(e^{\downarrow\alpha}a)^4 = e^{\downarrow 4\alpha}a^4 = \overline{O(a^4)}$$

$$(e^{\downarrow\alpha}a)^5 = e^{\downarrow 5\alpha}a^5 = \overline{O(a^5)} \text{ u. s. f.}$$

Anmerkung. Das nach einander aufsteigende Potenziren einer Zahl a allein kann auch nach der in Fig. 29 dargelegten leicht verständlichen Weise ausgeführt werden.

II. *Ist der Exponent eine negativ beziehliche ganze Zahl*, so wird man vorerst das Umgekehrte des Potentiands nach §. 112, 4. Beisp., construiren, und dieses nach dem positiv bezogenen Exponenten potenziren.

§. 114.

Zeichnende Darstellung des Radicirens ablenkend beziehlicher Zahlen.

I. Aus der für das Potenziren, in §. 113, angegebenen Construction ergibt sich nunmehr leicht die Construction der *Wurzeln aus ablenkend beziehlichen Zahlen.* Denn die $\sqrt[n]{e^{\downarrow\beta}b}$, weil sie wieder eine ablenkend beziehliche Zahl $e^{\downarrow\alpha}a$ sein wird, (a und b absolut genommen) muss, wenn man den Radicand $e^{\downarrow\beta}b$ als den um den Winkel β ablenkenden geraden Zug b vorstellt, durch jenen um den Winkel α ablenkenden geraden Zug a vorgestellt werden können, welcher constructionell zur n^{ten} Potenz erhoben wieder auf den Zug $e^{\downarrow\beta}b$ zurückführt; weil die Gleichungen $\sqrt[n]{e^{\downarrow\beta}b} = e^{\downarrow\alpha}a$ und $(e^{\downarrow\alpha}a)^n = e^{\downarrow\beta}b$ sich wechselweise bedingen.

Um aber hierbei die Wurzel sogleich, nach §. 76 und 77, *in der soviel-deutigen Beziehung zu erhalten, als der Wurzelexponent n zählt;* erwägt man, dass jede Richtung, also auch die Richtung OB, in Fig. 30, des den Radicand vorstellenden Zuges, nicht bloss dadurch erreicht wird, dass eine sich umdrehende Richtung um einen gewissen kleinsten Winkel β von der Grundrichtung OX ablenkt, sondern auch dadurch, dass sie nachher noch beliebig oft eine ganze Rundherum- oder Ringsumlenkung oder einen vollen Winkel, in demselben oder im entgegengesetzten Sinne der Ablenkung, beschreibt. Sonach kann man die Ablenkung der Richtung OB von der Grundrichtung OX als durch den Winkel $\beta + \mathfrak{b}.2\pi$ bestimmt ansehen, wenn $\mathfrak{b}$ eine positiv oder negativ beziehliche Anzahl vorstellt. Dann soll eigentlich

$$\overset{n}{W}(e^{\downarrow\beta}b) = \sqrt[n]{(e^{\downarrow(\beta+\mathfrak{b}.2\pi)}b)} = e^{\downarrow\alpha}a$$

und $$(e^{\downarrow\alpha}a)^n = e^{\downarrow n\alpha}a^n = e^{\downarrow(\beta+\mathfrak{b}.2\pi)}b$$

sein; folglich ist $n\alpha = \beta + \mathfrak{b}.2\pi,\quad a^n = b$

und $$\alpha = \frac{\beta}{n} + \mathfrak{b}\frac{2\pi}{n},\quad a = \sqrt[n]{b},$$

wofern $\mathfrak{b} = \pm(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n-1)$.

Man theilt demnach den Winkel $BOX = \beta$ in n gleiche Theile, so dass OA die nächste oder erste Theilungsrichtung an der Grundrichtung OX wird, mithin $AOX = \frac{\beta}{n}$ entfällt; und danach theilt man auch noch den mit der Richtung OA anfangenden und

endenden vollen Winkel 2π in n gleiche Theile, mittels der Richtungen OA', OA'', OA''', .. — Dann gehören die n Richtungen OA, OA', OA'', OA''', ..., dem geraden Zuge an, welcher die geforderte Wurzel darstellen soll.

Um die Länge a dieses Zuges zu erhalten, construirt man die absolute Zahl $a = \sqrt[n]{b}$ entweder versuchsweise, indem man für a eine gewisse Länge annimmt, und nachsieht, ob mittels constructioneller Potenzirung derselben, nach Fig. 28 o. 29, §. 113, I., ihre n^{te} Potenz $= b$ wird; oder, indem man diejenige Parabel construirt, deren Gleichung $y = x^n$ ist, und darin die Ordinate $y = b$ macht, wonach die Abscisse $x = \sqrt[n]{b} = a$ sich ergibt.

Ist insbesondere der Wurzelexponent $n = 2^m$, eine Potenz von 2, so bestimmt man die Wurzel $\sqrt[n]{b} = \sqrt[2^m]{b} = a$ leicht elementar-geometrisch durch $m$malige Construction der mittleren geometrischen Proportionale zwischen 1 und b.

Führt man endlich mit dem Halbmesser von der Länge a um den Fixpunkt O eine Kreislinie, so schneidet diese von den vorher gefundenen n Richtungen die n Züge ab, welche der Grösse und Beziehung nach die geforderte $\overset{n}{W}(e^{\downarrow\beta}b) = ((e^{\downarrow\alpha}a))$ darstellen.

II. *Ist insbesondere aus einer complexen ganzen Zahl,* $-5-\downarrow 12$, *die zweite Wurzel* in einer ganzen Zahl zu ziehen, so stellt man den Radicand durch seinen Coordinatenzug $\overline{O(12)M}$ in Fig. 24 dar, und beschreibt über OM als Durchmesser eine Kreislinie. Geht nun diese durch einen Kreuzungspunkt L, halbirt der gerade Zug oder der Strahl OL dieses Punktes den Winkel MOA; und wird er, so wie auch die Strecke ML durch Kreuzungspunkte in lauter unter sich gleiche Theile getheilt; so erhält man den Zug, welcher die geforderte zweite Wurzel, nämlich $+2-\downarrow 3$, darstellt.

§. 115.

Construction von Potenzen ablenkend beziehlicher Zahlen nach unganzen Exponenten.

I. *Ist der Exponent einer solchen Potenz rational,* also ein regelmässiger (gewöhnlicher) Bruch; so ist für den Fall, *wo sein Zähler* ± 1 *ist*, eine solche Potenz eigentlich eine Wurzel, nämlich $(e^{\downarrow\beta}b)^{\frac{\pm 1}{n}} = \sqrt[n]{(e^{\pm\downarrow\beta}b^{\pm 1})}$, daher die Construction nach dem eben Gelehrten auszuführen. *Ist aber der Zähler eine von 1 verschiedene Anzahl*, so ist eine solche Potenz $(e^{\downarrow\beta}b)^{\frac{p}{n}}$ entweder als eine Wurzel aus einer Potenz, $\sqrt[n]{(e^{\downarrow\beta}b)^p}$, oder als eine Potenz von einer Wurzel, $\sqrt[n]{(e^{\downarrow\beta}b)}^p$, darstellbar, und wird daher nach den zuletzt gezeigten zweierlei Constructionen gezeichnet. Der bestimmt beziehliche Grundwerth derselben wird dann als $e^{\downarrow\frac{p}{n}\beta} \cdot b^{\frac{p}{n}}$

durch einen geraden Zug OC von der Länge $b^{\frac{p}{n}} = (\sqrt[n]{b})^p = \sqrt[n]{b^p}$, dargestellt, dessen Richtung mit der Grundrichtung OX den Winkel $COX = \frac{p}{n}\beta = p\frac{\beta}{n}$ einschliesst.

Die Richtungen der übrigen $n-1$ geraden Züge ergeben sich, wenn man den mit OC anfangenden und schliessenden vollen Winkel 2π in n gleiche Theile theilt.

Vergl. Fig. 31, wo $(e^{\downarrow\beta}b)^{\frac{5}{3}} = (\sqrt[3]{e^{\downarrow\beta}b})^5$ construirt ist.

II. *Ist dagegen der Exponent irrational*, so kann man von der Potenz $(e^{\downarrow\beta}b)^m$ den Grundwerth $e^{\downarrow m\beta}b^m$, so weit als man nur immer will genähert, den Winkel $m\beta$ und die Länge b^m des ihn repräsentirenden geraden Zuges construiren. Da zugleich der allgemeine Ausdruck dieser Potenz

$$((e^{\downarrow\beta}b))^m = (e^{\downarrow(\beta+\mathfrak{b}.2\pi)}b)^m = e^{\downarrow(m\beta+\mathfrak{b}.2m\pi)}b^m$$

$$\mathfrak{b} = \pm\,(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \textit{in infinit.})\ \text{ist;}$$

so repräsentiren sämmtliche eben so langen Züge, die aus dem Anfangs- und Fixpunkte *O denkbar* sind, oder *alle Halbmesser* der um O mit dem Halbmesser b^m beschriebenen Kreislinie die gesammten — unendlich vielen — ablenkend beziehlichen Ausdrücke der geforderten Potenz; oder jeder solche Halbmesser oder Strahl repräsentirt diese Potenz in einer gewissen ablenkenden Beziehung.

Denn liegt der irrationale Exponent m zwischen zwei benachbarten, im Zähler nur um 1 verschiedenen, regelmässigen Brüchen vom selben Nenner n; so ist der an den Winkel $m\beta$ sich anschliesende volle Winkel 2π in n gleiche Theile zu theilen, damit seine $n-1$ Theilungsrichtungen die $n-1$ übrigen aklenkenden Beziehungen der Potenz b^m verbildlichen. Allein dieser Nenner n muss unendlich wachsend gedacht werden, damit dem irrationalen Exponenten m die ihn einschliessenden oder eingrenzenden nachbarlichen Brüche immer näher und näher, und so nahe kommen, als man nur immer will; dadurch aber rücken jede zwei unmittelbar auf einander folgende solche Theilungsrichtungen des vollen Winkels einander unendlich nahe, oder sie alle übergehen endlich in sämmtliche aus dem Punkte O möglichen verschiedenen Richtungen.

§. 116.

Zeichnung der Logarithmen ablenkend beziehlicher Zahlen.

I. Soll der *natürliche Logarithme* einer ablenkend beziehlichen Zahl $e^{\downarrow\alpha}a$ construirt werden, so ersetzen wir den Exponenten α durch den allgemeinen $\alpha + \mathfrak{a}\,.\,2\pi$, wo $\mathfrak{a} = \pm(0, 1, 2, \ldots \infty)$ ist. Dann hat man

$$l((e^{\downarrow\alpha}a)) = l\,(e^{\downarrow(\alpha+\mathfrak{a}2\pi)}a) = la + \downarrow(\alpha + \mathfrak{a}\,.\,2\pi).$$

Nun construirt man von der absoluten Zahl a den natürlichen Logarithmen la, indem man die Logistik (logarithmische Linie), deren Coordinatengleichung $y = e^x$ ist, ver-

zeichnet und in ihr die Ordinate $y = a$ macht, wornach die Abscisse $x = ly = la$ wird. Danach trägt man vom Endpunkte dieser Abscisse auf die daselbst errichtete Senkrechte die Längeneinheit (d. i. die der Abscisse 0 entsprechende Ordinate, weil, für $x = 0$, $y = 1$ ist) erst nach Vorschrift der Zahl α und dann noch beliebig oft, nach der einen und anderen Richtung (Seite) hin, weiter nach Vorschrift der Zahl $2\pi = 6{\cdot}283185 \ldots$. Dann repräsentirt jeder der unzählig vielen solchen Coordinatenzüge $la + \downarrow(\alpha + \mathfrak{a}.\,2\pi)$, wo $\mathfrak{a} = \pm(0,\, 1,\, 2,\, \ldots\ldots \infty)$ oder der ihm gleichgeltende gerade Zug $e^{\downarrow\delta}d$, der durch die Gleichungen

$$\frac{la}{cos.\delta} = \frac{\alpha + \mathfrak{a}.2\pi}{sin.\delta} = \frac{la + \downarrow(\alpha + \mathfrak{a}.2\pi)}{cos.\delta + \downarrow sin.\delta = e^{\downarrow\delta}} = d = val.\,abs.\,\sqrt{(la)^2 + (\alpha + \mathfrak{a}.2\pi)^2}$$

bestimmt wird, den verlangten Logarithmen $l((e^{\downarrow\alpha}))$.

2. *Jeder künstliche Logarithme* für eine gewisse Grundzahl b wird entweder nach der allgemeinen Vorschrift

$$\overset{b}{log}.n = \frac{ln}{lb}$$

auf einen natürlichen Logarithmen gebracht, wornach

$$\overset{b}{log}.\,(e^{\downarrow\alpha}a) = \frac{1}{lb}\,l\,(e^{\downarrow\alpha}a)$$

wird, und nach dem so eben Gelehrten so wie nach §. 108 — 112 zu construiren kommt; oder man nimmt in der gewöhnlichen Weise die Logarithmen und bekommt

$$\overset{b}{log}.\,((e^{\downarrow\alpha}a)) = \overset{b}{log}.\,(e^{\downarrow(\alpha + \mathfrak{a}.2\pi)}a) = \overset{b}{log}.\,a + \downarrow(\alpha + \mathfrak{a}{\cdot}2\pi)\,\overset{b}{log}.\,e$$

wo man den ersten Theil und den letzten Factor des zweiten Theils mittels der Logistik $y = b^x$ construirt, indem man einmal $y = a$ nimmt und $x = \overset{b}{log}.\,y = \overset{b}{log}.\,a$ erhält, und ein ander Mal $y = e$ nimmt und $x = \overset{b}{log}.\,e$ findet.

§. 117.

Construction natürlicher Potenzen nach complexen oder ablenkend beziehlichen Exponenten.

1. Der natürlichen Potenz $e^{\alpha + \downarrow\beta}$ ertheilt man, *um sie zu construiren*, die Form $e^{\downarrow\beta}e^{\alpha}$, welche durch einen geraden Zug vorgestellt wird, dessen Elongationswinkel die Grösse β besitzt und dessen Länge e^{α} sich ergibt, wenn man in der Logistik $y = e^x$ die $x = \alpha$, oder in der logarithmischen Spirale $r = e^{\varphi}$ den Polarwinkel $\varphi = \alpha$ macht, da man dort die $y = e^{\alpha}$ und hier den Radiusvector $r = e^{\alpha}$ erhält.

II. Weil die complexe Zahl $\alpha + \downarrow\beta$ auch als die ablenkend beziehliche $e^{\downarrow\mu}m$ vermöge §. 80, I mittels der Gleichungen

$$\frac{\alpha}{cos.\,\mu} = \frac{\beta}{sin.\,\mu} = \frac{\alpha + \downarrow\beta}{cos.\,\mu + \downarrow sin.\,\mu = e^{\downarrow\mu}} = m = val.\,abs.\,\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

dargestellt werden kann, so ist damit auch nachgewiesen, wie die *natürliche Potenz* $e^{(e^{\downarrow\mu} m)}$ *durch einen geraden Zug darstellbar ist.*

§. 118.

Construction jeglicher Potenz eines complexen oder ablenkend beziehlichen Potentiands nach jedwedem complexen oder ablenkend beziehlichen Exponenten.

I. Es ist ganz allgemein

$$(e^{\downarrow\alpha}a)^{n+\downarrow p} = (e^{\downarrow\alpha}a)^n . (e^{\downarrow\alpha + la})^{\downarrow p} = (e^{\downarrow\alpha}a)^n . e^{-\alpha p + \downarrow pla}$$

d. h. die Potenz $(e^{\downarrow\alpha}a)^{n+\downarrow p} = (a \cos. \alpha + \downarrow a \sin. \alpha)^{n+\downarrow p}$ lässt sich auf die Form eines Productes zurückführen, dessen Factoren

$$(e^{\downarrow\alpha}a)^n \text{ und } e^{-\alpha p + \downarrow pla}$$

nach §. 113, 115 und 117 construirbar sind, und das sodann selbst nach §. 107 — 111 construirbar ist.

II. Setzt man $n + \downarrow p = e^{\downarrow\mu}m$,

also $\frac{n}{\cos. \mu} = \frac{p}{\sin. \mu} = \frac{n+\downarrow p}{e^{\downarrow\mu}} = m = val.\ abs.\ \sqrt{n^2 + p^2}$

so wird $(e^{\downarrow\alpha}a)^{n+\downarrow p} = (e^{\downarrow\alpha}a)^{(e^{\downarrow\mu}m)}$;

mithin ist auch *nachgewiesen, wie die allgemeinste Potenz* $(e^{\downarrow\alpha}a)^{(e^{\downarrow\mu}m)}$ *construirt werden kann.*

§. 119.

Rückblick.

Aus dem ganzen Zuge unserer geometrischen Constructionen von §. 106 an bis hieher erhellt nun, dass und wie die Ergebnisse sämmtlicher sieben Grundrechnungen der Algebra von der Geometrie der Ebene construirt, namentlich durch Strecken dargestellt werden können, und wie ihre Constructionen folgerecht aus einander hervorgehen und innigst unter sich zusammenhängen. Daraus wird sofort ersichtlich, dass und wie alle Arten von Rechnungsausdrücken mittels Construction in einer Ebene durch Strecken verbildlicht werden können.

§. 120.

Bestimmung von Punkten im Raume durch unebene Züge und zunächst durch winkelrechte Coordinatenzüge.

Bisher haben wir alle in Betracht genommenen räumlichen Gegenstände in einerlei Ebene enthalten vorausgesetzt, namentlich wurden alle unmittelbar oder mittelbar zu bestimmenden Punkte mit der Grundrichtung in der nämlichen Ebene befindlich angenommen. Gegenwärtig heben wir diese Annahme oder Bedingung auf, und erforschen demnach die

Bestimmung von Punkten des Raumes in Bezug auf einen fixen Punkt und eine festgestellte Grundrichtung mittels *unebener*, d. i. nicht in Einer Ebene enthaltener, gebrochener Züge.

In diesem Falle muss entweder noch eine zweite Grundrichtung — gewöhnlich auf der ersteren senkrecht — oder eine Grundebene festgestellt werden, welche meistens entweder die erste Grundrichtung enthält oder zu ihr parallel ist. Denn hier genügt der Winkel, um den die zu bestimmende Richtung von der ersten Grundrichtung ablenkt, alleinig noch nicht zur Bestimmung jener Richtung, sondern dazu ist jederzeit noch ein zweiter Winkel erforderlich; oder überhaupt, es müssen zwei Winkel zur Bestimmung einer Richtung verwendet werden.

Alle solche Bestimmung von Punkten wird in der einfachsten Weise, auf welche jede zusammengesetztere zurückkommt, mittels eines *geraden Zuges* von einem bereits bestimmten Punkte O aus zu dem zu bestimmenden M bewirkt.

Sei nun OX in Fig. 33 die durch den Anfangspunkt O des Zuges $OM = r$ zur ersten Grundrichtung parallel gleichstimmige Richtung, und Q die Projection des zu bestimmenden Punktes M in die durch OX zur Grundebene parallel geführte Ebene. Dann kann man zuerst den Projectionspunkt Q in der Grundebene entweder durch die rechtwinkligen Coordinaten $OP = x$ und $PQ = y$, oder durch die Polarcoordinaten $XOQ = \alpha$ und $OQ = u$ bestimmen, und nachher in der auf der Grundebene senkrechten projicirenden Ebene QOM des Radiusvectors OM den Punkt M selbst mittels der rechtwinkligen Coordinaten $OQ = u$ und $QM = z$ oder mittels der Polarcoordinaten $QOM = \beta$ und $OM = r$. So wird der Punkt M eigentlich durch den dreigliedrigen winkelrecht gebrochenen Coordinatenzug $\overline{OPQM}$ bestimmt.

Die *erste Bestimmung* (des Punktes Q) in der Grundebene gibt vermöge §. 104 die Gleichungen des bestimmenden Zuges von O nach Q

$$e^{\downarrow\alpha}u = x + \downarrow y$$

$$\frac{x}{cos.\,\alpha} = \frac{y}{sin.\,\alpha} = \frac{x + \downarrow y}{cos.\,\alpha + \downarrow sin.\,\alpha = e^{\downarrow\alpha}} = u = val.\ abs.\ \sqrt{x^2 + y^2}.$$

In der *zweiten Bestimmung* (jener des Punktes M) in der auf der Grundebene senkrechten projicirenden Ebene des Radiusvectors OM muss das Zeichen $\downarrow$ der transversiven Beziehung oder des Senkrechtseins, zur Unterscheidung, weil hier die Ablenkung in einer anderen Ebene als früher vor sich geht, in ein anderes umgetauscht werden; zu welchem Zwecke wir es hier, um dem Buchdrucker keine zwecklosen Schwierigkeiten zu machen, bloss einfach umkehren. Daher bestehen hier die Gleichungen des Zuges von O nach M

$$e^{\uparrow\beta}r = u + \uparrow z$$

$$\frac{u}{cos.\,\beta} = \frac{z}{sin.\,\beta} = \frac{u + \uparrow z}{cos.\,\beta + \uparrow sin.\,\beta = e^{\uparrow\beta}} = r = val.\ abs.\ \sqrt{u^2 + z^2}.$$

Eliminirt man aus den ersten Gleichungen dieser zwei Systeme von Gleichungen die Zahl u, so findet man die Hauptgleichung

$$e^{\downarrow\alpha + \uparrow\beta}r = x + \downarrow y + \uparrow e^{\downarrow\alpha}z$$

zur Vergleichung des geraden Zuges $\overline{OM}$, dessen Richtung durch die beiden Winkel $\alpha = XOQ$ und $\beta = QOM$ bestimmt wird, mit dem unebenen dreigliedrigen rechtbrüchigen Coordinatenzuge $\overline{OPQM}$.

Sie übergeht durch complexe Darstellung von $e^{\downarrow\alpha}$ und $e^{\uparrow\beta}$ nach und nach in

$$x + \downarrow y + (\uparrow e^{\downarrow\alpha})z = e^{\downarrow\alpha}(r\ cos.\ \beta + \uparrow r\ sin.\ \beta)$$
$$= (cos.\ \alpha + \downarrow sin.\ \alpha)\ (r\ cos.\ \beta) + (\uparrow e^{\downarrow\alpha})\ (r\ sin.\ \beta)$$
$$= r\ cos.\ \alpha\ cos.\ \beta + \downarrow r\ sin.\ \alpha\ cos.\ \beta + (\uparrow e^{\downarrow\alpha})\ r\ sin.\ \beta;$$

und hieraus findet man (weil das Zeichen $\uparrow e^{\downarrow\alpha}$ eigentlich andeutet, dass auf der um α von OX ablenkenden OQ und auf der Grundebene die $QM = z$ senkrecht ist) durch Gleichstellung des Gleichbeziehlichen, die gewöhnlichen Gleichungen

$$x = r\ cos.\ \alpha\ cos.\ \beta$$
$$y = r\ sin.\ \alpha\ cos.\ \beta$$
$$z = r\ sin.\ \beta.$$

Ferner liefern die Gleichungen

$$u^2 = x^2 + y^2, \qquad \text{und} \qquad r^2 = u^2 + z^2$$

sogleich

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Endlich geben die Gleichungen

$$\frac{x}{cos.\ \alpha} = \frac{y}{sin.\ \alpha} = u \quad \text{und} \quad \frac{u}{cos.\ \beta} = \frac{z}{sin.\ \beta} = r$$

auch die folgenden

$$\frac{x}{cos.\ \alpha\ cos.\ \beta} = \frac{y}{sin.\ \alpha\ cos.\ \beta} = \frac{z}{sin.\ \beta} = r = val.\ abs.\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

die man auch aus den früher gefundenen erhalten würde.

§. 121.

Fortsetzung.

Andere Bestimmungsweise.

In einer anderen Weise kann man den Radiusvectorzug $\overline{OM}$, in Fig. 34, dessen Elongationswinkel von OX oder $OP = x$ wir durch λ andeuten wollen, auch, wenn man ihn mittels der MP auf die Grundrichtung OX projicirt, durch den in der Ebene der OM und OX liegenden zweigliedrigen Coordinatenzug $\overline{OPM}$ ersetzen; wonach, wenn $PM = v$ gesetzt wird,

$$e^{\downarrow\lambda}r = x + \downarrow v$$

$$\frac{x}{cos.\ \lambda} = \frac{y}{sin.\ \lambda} = r \qquad r^2 = x^2 + v^2 \text{ ist.}$$

Nachher lässt sich eben so der gerade Zug $\overline{PM}$ dadurch, dass man ihn mittels der

MQ auf die Grundebene projicirt, durch den Coordinatenzug $\overline{PQM}$ ersetzen. Die Ebene PMQ dieses Zuges steht auf der Grundebene und auf der Ebene des Winkels $MOX = \lambda$ senkrecht, also ist der Winkel $MPQ = \vartheta$ der Neigungswinkel der beiden letzteren Ebenen, oder auch jener der PM gegen die Grundebene. Setzt man wieder $PQ = y$ und $QM = z$, und ändert man zur Unterscheidung das Beziehungszeichen $\downarrow$ hier in $\rightarrow$ ab*), so wird

$$e^{\rightarrow\vartheta}v = y + \rightarrow z$$

$$\frac{y}{\cos.\ \vartheta} = \frac{z}{\sin.\ \vartheta} = v, \qquad v^2 = y^2 + z^2.$$

Eliminirt man hier v, so erhält man die Hauptgleichung

$$e^{\downarrow\lambda + \rightarrow\vartheta}r = e^{\rightarrow\vartheta}x + \downarrow y + (\downarrow\rightarrow)z$$

oder nach einer leichten Umwandlung

$$e^{\rightarrow\vartheta}x + \downarrow y + (\downarrow\rightarrow)z = e^{\rightarrow\vartheta}r\ \cos.\ \lambda + \downarrow r\ \sin.\ \lambda\ \cos.\ \vartheta + (\downarrow\rightarrow)r\ \sin.\ \lambda\ \sin.\ \vartheta:$$

daher

$$x = r\ \cos.\ \lambda, \qquad y = r\ \sin.\ \lambda\ \cos.\ \vartheta, \qquad z = r\ \sin.\ \lambda\ \sin.\ \vartheta;$$

ferner wieder

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und

$$\frac{x}{\cos.\ \lambda} = \frac{y}{\sin.\ \lambda\ \cos.\ \vartheta} = \frac{z}{\sin.\ \lambda\ \sin.\ \vartheta} = r.$$

§. 122.

Fortsetzung.

Bestimmung durch unebene gebrochene Züge von beliebiger Form.

Die rechtwinkeligen Coordinaten $OP = x$, $PQ = y$ und $QM = z$ des Punktes M (Fig. 33 o. 34) im Raume pflegt man auch gewöhnlich den Projectionen des Radiusvectors $OM = r$ auf drei zu den Coordinaten x, y, z parallele und daher auf einander senkrechte Axen gleichzustellen, von denen die erste OX die Grundrichtung ist, die zweite OY auf ihr senkrecht steht, und in der Grundebene liegt, die dritte OZ endlich auf der Grundebene senkrecht ist, und welche zusammen die drei Axen der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z heissen.

Wird nun in Bezug auf einen fixen Punkt O — Ursprung der Coordinaten — eine fixe Richtung OX — Grundrichtung — und eine fixe Ebene XOY — Grundebene — ein Punkt mittels eines unebenen gebrochenen Zuges bestimmt, und werden die einzelnen Strecken oder Glieder r desselben durch einen dreigliedrigen, zu den Axen der x, y, z

*) Dass unser Pfeilzeichen, als Transversivzeichen der Beziehungen, zu Gunsten des Bücherdruckes, auch aufgestellt und gelegt werden kann, ist wohl eher ein Vorzug als ein Mangel desselben; da andere mathematische Schriftsteller, wie *Gauss*, *Bretschneider*, *Wittstein*, *Hamilton* (vergl. §. 136 und 137), zur Bezeichnung der Verschiedenheit von transversen Beziehungen der Messeinheit, nebst i auch noch j und k zu Hilfe zu nehmen sich gezwungen sehen.

parallelen Coordinatenzug ersetzt, so ist die algebraische Summe aller dieser Strecken nach dem Obigen, wofern Σ das gewöhnliche über alle solche Strecken sich ausdehnende Summenzeichen vorstellt.

$$= \Sigma\,(e^{\downarrow\alpha + \uparrow\beta} r) = \Sigma\,(x + \downarrow y + \uparrow e^{\downarrow\alpha} z) \qquad \text{oder auch}$$
$$= \Sigma\,(e^{\downarrow\lambda + \rightarrow\vartheta} r) = \Sigma\,(e^{\rightarrow\vartheta} x + \downarrow y + \downarrow\rightarrow z).$$

Obwohl nun für die verschiedenen Strecken oder Glieder des gebrochenen Zuges die Winkel α verschieden ausfallen, so gibt doch das Beziehungszeichen $\uparrow e^{\downarrow\alpha}$ immer nur das Senkrechtsein der z auf der Ebene dieses Winkels, d. i. auf der Grundebene, zu erkennen, gerade so, als wenn $\alpha = 0$ wäre, für welchen Fall jenes Zeichen einfach in $\uparrow$ übergeht. Darum kann dasselbe für alle einzelnen Glieder durch dieses einfache Zeichen $\uparrow$ ersetzt werden, das somit das Senkrechtsein auf der Grundebene andeutet. Aus gleichem Grunde kann man in $e^{\rightarrow\vartheta} x$ das Zeichen $e^{\rightarrow\vartheta}$ des Senkrechtseins von x auf der Ebene des Winkels ϑ, weil alle diese Senkrechten in der OX liegen, für $\vartheta = 0$ in 1 übergehen machen, und das Zeichen $\downarrow\rightarrow$ von z einfach wie oben in $\uparrow$ vertauschen. Auf diese Weise wird des gebrochenen Zuges algebraischer Ausdruck

$$\Sigma\,(e^{\downarrow\alpha + \uparrow\beta} r) = \Sigma\,(e^{\downarrow\lambda + \rightarrow\vartheta} r) = \Sigma\,(x + \downarrow y + \uparrow z)$$
$$= \Sigma\, x + \downarrow\Sigma y + \uparrow\Sigma z.$$

Bezeichnet man den geraden Zug, der zwischen denselben Punkten wie jener gebrochene liegt, mit R und seine Projection auf die Axen der x, y, z mit X, Y, Z; so ist er auch dem rechtwinkligen Coordinatenzuge

$$X + \downarrow Y + \uparrow Z$$

gleich, so wie auch jenem gebrochenen selbst. Daher dienen zur Vergleichung dieser Züge die Gleichungen

$$X + \downarrow Y + \uparrow Z = \Sigma\,(e^{\downarrow\alpha + \uparrow\beta} r) = \Sigma\,(e^{\downarrow\lambda + \rightarrow\vartheta} r) = \Sigma x + \downarrow\Sigma y + \uparrow\Sigma z$$
$$= \Sigma\, r \cos.\, \alpha \sin.\, \beta + \downarrow\Sigma\, r \sin.\, \alpha \cos.\, \beta + \uparrow\Sigma\, r \sin.\, \beta$$
$$= \Sigma\, r \cos.\, \lambda + \downarrow\Sigma\, r \sin.\, \lambda \cos.\, \vartheta + \uparrow\Sigma\, r \sin.\, \lambda \sin.\, \vartheta,$$

oder die gewöhnlichen

$$X = \Sigma x = \Sigma r \cos.\, \alpha \cos.\, \beta = \Sigma r \cos.\, \lambda$$
$$Y = \Sigma y = \Sigma r \sin.\, \alpha \cos.\, \beta = \Sigma r \sin.\, \lambda \cos.\, \vartheta$$
$$Z = \Sigma z = \Sigma r \sin.\, \beta \qquad = \Sigma r \sin.\, \lambda \sin.\, \vartheta, \text{ und}$$
$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

§. 123.

Schluss.

Andeutung der Anwendungen.

Die hier gefundenen Gleichungen sind bekanntlich *die Grundlage der gesammten analytischen Geometrie im Raume,* d. i. der rechnenden Untersuchungen der geraden, eben-

und uneben krummen (einfach und doppelt gekrümmten) Linien, der Ebenen und Flächen, also auch der sphärischen Trigonometrie und Polygonometrie. Diesen bekannten Gegenstand hier weiter zu verfolgen, würde jedoch mit dem Zwecke unserer Abhandlung streiten; wesswegen dies dem Leser überlassen bleiben soll.

Eine andere höchst interessante, hier aber auch nur erwähnbare, Anwendung der Lehre von den ablenkenden Beziehungen der Strecken, mögen sie insgesammt in einer Ebene enthalten sein oder nicht, gestattet in der *Statik* die Lehre von der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte, und in der *Dynamik* die Lehre von der Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen. Z. B. Wenn P und Q zwei unter dem Winkel γ auf einen materiellen Punkt wirksame Kräfte sind, und R ihre unter den Winkeln β und α gegen sie geneigte Resultirende ist; so wird diese der Grösse und Richtung nach durch einen der Ausdrücke bestimmt

$$e^{\sqrt{}\alpha} R = Q + e^{\sqrt{}\gamma} P, \quad e^{\sqrt{}\beta} R = P + e^{\sqrt{}\gamma} Q$$

wo $$\alpha + \beta = \gamma.$$

B. Ablenkende Beziehungen der Winkel und der sie bestimmenden Kreisbogen.

§. 124.

Zu einem Winkel a wird ein anderer b *addirt*, wenn eine bewegliche Richtung, nachdem sie aus ihrer ursprünglichen Lage — dem Anfangsschenkel des Winkels a — aus gehend in einer bestimmten Ebene den Winkel a durchstreift hat, von dem Endschenkel dieses Winkels aus noch weiter in der nämlichen Ebene und in demselben Sinne um den Winkel b ablenkt (sich dreht), also wenn in einerlei Ebene der Winkel b sich an und neben den Winkel a anlegt. Mithin wird von a der Winkel b *abgezogen*, wenn die bewegliche Richtung vom Endschenkel des Winkels aus im entgegengesetzten Sinne um den Winkel b ablenkt, also der Winkel b sich auf den Winkel a zurücklegt.

Die Aggregation des Winkels b an a *erfolgt* daher *entgegengesetzt*, wenn die Ebene des Winkels b, aus der des Winkels a heraustretend und um den gemeinschaftlichen Schenkel beider Winkel sich drehend, einen gestreckten Winkel π durchstreift. Mithin ist die *Aggregation des Winkels* b an a als *nur zum Theil entgegengesetzt*, als *abweichend* oder *ablenkend* anzusehen, wenn die Ebene des Winkels b bei dieser Drehung keinen gestreckten, sondern einen davon verschiedenen Winkel durchstreift, dessen auf die analytische Winkeleinheit bezogener Zahlwerth β das Mass der Ablenkung der Aggregationsbeziehung des Winkels b von der Grundbeziehung abgibt.

Sonach ist der algebraische Ausdruck dieses Winkelaggregates $a + e^{\sqrt{}\beta} b$.

Weicht auch die Ebene des Winkels a von einer voraus festgesetzten Grundebene um den Winkel α, so wie jene des Winkels b um den Winkel β ab; so beträgt das Aggregat beider Winkel $e^{\sqrt{}\alpha} a + e^{\sqrt{}\beta} b$.

Ist dann r der Winkel, den der Endschenkel des Winkels b mit dem Anfangsschenkel des Winkels a, oder die bewegliche Richtung nach ihrem Durchstreifen der Winkel a und b mit der Grundrichtung, von der sie ausging, bildet, und weicht die Ebene dieses Winkels r von der Grundebene um den Winkel ϱ ab; so ist dieser Winkel r der Grösse und algebraischen Beziehung nach $e^{\downarrow\varrho}r$.

Allein! Dieser Winkel $e^{\downarrow\varrho}r$ kann keineswegs obiger algebraischen Summe $e^{\downarrow\alpha}a + e^{\downarrow\beta}b$ der Winkel a und b gleichgestellt werden.

Denn führen bei denselben Ablenkungen α und β die Winkel a' und b' auf den auch um ϱ von der Grundebene ablenkenden Winkel r'; so führen die ebenfalls um α und β ablenkenden Winkel $a + a'$ und $b + b'$, wie sich ohne sonderliche Schwierigkeiten einsehen lässt, keineswegs auf den gleichfalls um ϱ ablenkenden Winkel $r + r'$. Mithin fehlt zu jener Gleichstellung von $e^{\downarrow\varrho}r$ mit $e^{\downarrow\alpha}a + e^{\downarrow\beta}b$ die in §. 96 angeführte unerlässliche Grundbedingung.

All das von den *Winkeln* Gesagte gilt auch von den mit einerlei Halbmesser um ihren gemeinsamen Scheitel zwischen den Schenkeln beschriebenen *Kreisbogen*, denjenigen nämlich, in welchen die Grundebene und die Ebenen der betrachteten Winkel eine um den gemeinschaftlichen Scheitel als Mittelpunkt gelegte Kugelfläche schneiden.

Darum lassen wir die ausführliche Betrachtung der ablenkenden algebraischen Beziehungen der Winkel und der sie bestimmenden Kreisbogen, als keine Aussicht auf ein erkleckliches Ergebniss darbietend, fallen.

C. Ablenkende Beziehungen der ebenen Flächen (Figuren).

§. 125.

Allgemeines.

Zu einer begrenzten ebenen Fläche a — einer gerad- oder krummlinig begrenzten Figur — wird eine andere solche Fläche b *addirt*, wenn diese Flächen an einander hangen, d. h. wenn die Umfänge beider Figuren einen Theil gemeinschaftlich haben, und wenn beide Figuren in einerlei Ebene ausser einander liegen, nämlich das Innere einer jeden Figur im Äusseren der anderen liegt. Mithin wird von einer (versteht sich begrenzten) Fläche a eine andere b *abgezogen*, wenn diese letztere in das Innere der ersteren zu liegen kommt.

Die Aggregation einer ebenen Fläche b erfolgt daher *entgegengesetzt*, wenn die Ebene der Fläche b aus der Ebene der Fläche a heraustritt, und um ihre Durchschnittslinie oder um eine zu dieser parallele Gerade sich drehend einen gestreckten Winkel π durchläuft, dabei aber die Umfänge beider Figuren einen Theil gemeinschaftlich behalten.

Mithin ist die *Aggregation der Fläche b* an a als *nur zum Theil entgegengesetzt*, als *abweichend* oder *ablenkend* anzusehen, wenn die Ebene der Figur b bei dieser Drehung kei-

nen gestreckten, sondern einen beliebigen Winkel durchstreift, dessen auf die analytische Winkeleinheit bezogener Zahlwerth β das Mass der Ablenkung der Aggregationsbeziehung der Fläche b von der Grundbeziehung abgibt.

Sonach ist der algebraische Ausdruck dieses Aggregates der an einander hängenden Flächen a und b offenbar $a + e^{\downarrow\beta}b$.

Weicht auch die Ebene der Fläche a von einer gewissen bereits festgestellten Grundebene um den Winkel α, so wie jene der Fläche b um den Winkel β ab; so beträgt das Aggregat beider zusammenhängenden Flächen

$$e^{\downarrow\alpha}a + e^{\downarrow\beta}b.$$

§. 126.

Ketten von Parallelogrammen.

Sind in einem ganz besonderen und einfachen Falle die unter den Winkeln α und β gegen die Grundebene geneigten Figuren a und b zwei Parallelogramme, welche eine Seite — die Grundlinie — gleich lang haben, und erfolgt ihr Anschluss an einander in zwei solchen gleich langen Grundlinien, so dass diese entweder völlig übereinfallen oder wenigstens einen Theil gemeinschaftlich haben; so sind ihre mit dieser gemeinsamen Seite parallelen und gleichen Seiten auch unter einander parallel und gleich; folglich bestimmen sie ein Parallelogramm r von derselben Grundlinie, welches, wenn seine Ebene gegen die Grundebene um den Winkel ϱ geneigt ist, die ablenkende Aggregationsbeziehung $e^{\downarrow\varrho}$ besitzt.

Dieses Parallelogramm $e^{\downarrow\varrho}r$ nun vermag die algebraische Summe der Parallelogramme $e^{\downarrow\alpha}a$ und $e^{\downarrow\beta}b$ zu ersetzen, nämlich man ist berechtigt, die (nach §. 96 gemodelte) *Gleichung*

$$e^{\downarrow\alpha}a + e^{\downarrow\beta}b = e^{\downarrow\varrho}r \text{ aufzustellen.}$$

Oder: wenn eine der gemeinsamen Grundlinie der Parallelogramme gleiche Gerade, indem sie sich parallel zu sich selbst fortbewegt, zuerst das Parallelogramm $e^{\downarrow\alpha}a$, und danach das mit ihm zusammenhängende Parallelogramm $e^{\downarrow\beta}b$ beschreibt; so ist es in Absicht auf Grösse und Beziehung der gesammten beschriebenen Fläche dasselbe, als wenn die beschreibende Gerade bloss das Parallelogramm $e^{\downarrow\varrho}r$ beschriebe.

Denn legt man auf eine, also auch auf alle drei unter sich parallele Grundlinien der zusammenhängenden Parallelogramme $e^{\downarrow\alpha}a$, $e^{\downarrow\beta}b$, $e^{\downarrow\varrho}r$ eine Ebene senkrecht, so schneidet sie die Ebenen dieser Parallelogramme in den Höhen A, B, R derselben und die Grundebene in einer Geraden, deren eine Richtung man als Grundrichtung ansehen kann, und mit welcher Richtung die Richtungen der Höhen die Neigungswinkel α, β, ϱ der Ebenen der Parallelogramme gegen die Grundebene bilden. Mithin kann die Strecke $e^{\downarrow\varrho}R$ vermöge §. 96 die algebraische Summe der Strecken $e^{\downarrow\alpha}A$, $e^{\downarrow\beta}B$ ersetzen, also $e^{\downarrow\alpha}A + e^{\downarrow\beta}B = e^{\downarrow\varrho}R$ gestellt werden. Allein den Höhen A, B, R sind die Parallelogramme a, b, r, wegen der Gleichheit ihrer Grundlinien, (direct) proportionirt; folglich können in der letzten Gleichung

die Höhen durch die Parallelogramme ersetzt werden, und da ergibt sich die zu erweisende Gleichung $e^{\dagger\alpha}a + e^{\dagger\beta}b = e^{\dagger\varrho}r.$

Auch kann man diesen Satz so wie jenen in §. 97 erweisen, indem man an einer leicht zu entwerfenden Zeichnung darthut, dass, wenn bei denselben Winkeln mit a' und b' das r' zusammengehört, auch mit den Summen $a + a'$ und $b + b'$ die Summe $r + r'$ zusammengehört.

Hieraus ersieht man sogleich, dass dieser Satz auch für beliebig viele in der beschriebenen Weise an einander hangende Parallelogramme von gleichen Grundlinien, also gleichsam für ein gebrochenes oder gegliedertes Band, gelten muss, und dass daher auch solche Ketten oder Netze von Parallelogrammen, die sich zwischen denselben zwei gleich langen parallelen Strecken ausbreiten, rücksichtlich ihrer algebraischen Geltung, einander vertreten oder einander gleich geachtet werden können. Mithin gelten alle in §. 99, 103 — 106 und §. 120 — 122 aufgestellten Gleichungen auch noch, wenn die dort vorkommenden lateinischen Buchstaben solche an einander hangende Parallelogramme und die griechischen Buchstaben die Winkel ihrer Ebenen mit der Grundebene vorstellen.

§. 127.

Figurennetze.

Mit jeder ebenen Figur oder Fläche a, welche gegen die Grundebene unter einem gewissen Winkel α geneigt ist, und mit anderen solchen Flächen an den Umfängen zusammenhängt, können aber, ohne Abänderung ihrer Grösse und algebraischen Beziehung, folgende *Verwandlungen* oder Veränderungen vorgenommen werden.

1. Jede solche Fläche a kann *in der Ebene*, in welcher sie liegt, ganz so wie sie ist,*) an jeden andern Ort übertragen und beliebig herumgedreht, kurz in jede gefällige Lage gebracht werden, so dass sie mit den angrenzenden Flächen auf eine von der früheren verschiedene Weise am Umfange zusammenhängt.

2. Die Ebene, in der diese Figur a liegt, kann entweder *parallel* zu sich selbst *verschoben*, oder beliebig dergestalt *gedreht* werden, dass ihr *Neigungswinkel* α *gegen die Grundebene stets ungeändert bleibt*; indem man sich nämlich durch was immer für einen Punkt die Senkrechten auf die Grundebene und auf die Ebene der Figur a führt, und um jene Senkrechte der Grundebene diese Senkrechte der Ebene der Figur, sammt eben dieser Ebene und der Durchschnittslinie beider Ebenen, herumdreht. Man kann demnach die substituirende Ebene der Figur a durch jede zwei Punkte oder durch jegliche Gerade dermassen führen, dass sie mit der Grundebene den Winkel α mache.

3. Nebst dieser Ortsveränderung der Figur bei ungeänderter Form kann aber die Figur a bekanntlich auch noch, ohne Abänderung ihrer Grösse oder ihres Flächeninhaltes

*) gleichsam als wäre sie aus einem ebenen Papier ausgeschnitten,

in mancherlei anders gestaltete Figuren, für unsere gegenwärtige Untersuchung in ein Parallelogramm von — der Lage und Grösse nach — bestimmter Grundlinie oder Höhe verwandeln.

Mithin lässt sich jede Figur, in Absicht auf Grösse und Aggregationsbeziehung, durch ein eben so grosses und gegen die Grundebene gleich geneigtes Parallelogramm ersetzen, dessen Grundlinie eine angewiesene Länge und Lage haben soll.

Bilden demnach mehrere der Reihe nach unter sich zusammenhängende ebene Figuren a, b, c, d, ... ein so genanntes *Figurennetz*; so kann man sie, eine nach der anderen, mit Beibehaltung der Winkel α, β, γ, δ, ... ihrer Ebenen mit der Grundebene in (paarweise) an einander hangende Parallelogramme, von gleicher, zur Grundebene paralleler Grundlinie verwandeln, also das Figurennetz durch ein Netz oder eine Kette von Parallelogrammen ersetzen.

Ist dann durch die erste und letzte Grundlinie dieser Parallelogrammkette ein Parallelogramm r bestimmt, dessen Ebene mit der Grundebene den Winkel ϱ macht; so gilt dieses, wie aus dem vorigen Paragraphe leicht ersichtlich ist, der algebraischen Summe aller jener Parallelogramme gleich. Ersetzt man endlich wieder diese letzteren Parallelogramme durch jene Figuren a, b, c, d, ..., welche in sie verwandelt worden waren, und das Parallelogramm r durch eine ihm gleiche und so wie selbes gegen die Grundebene geneigte Figur, so hat man die Gleichung

$$e^{\downarrow\varrho} r = e^{\downarrow\alpha} a + e^{\downarrow\beta} b + e^{\downarrow\gamma} c + e^{\downarrow\delta} d + \ldots.$$

Auf diese Weise vermag man demnach jedes Figurennetz, in Rücksicht auf seine algebraische Geltung, in eine einzige äquivalente Figur, oder auch in ein anderes Figurennetz zu verwandeln. Daher bestehen die in §. 99, 103 — 106 und §. 120 — 122 aufgestellten Gleichungen auch noch, wenn man die lateinischen Buchstaben beliebige ebene Figuren oder Flächen, und die ihnen zugehörigen gleichlautenden griechischen Buchstaben die Neigungswinkel ihrer Ebenen gegen die Grundebene vorstellen lässt.

§. 128.

Andeutung der überraschenden Verwendbarkeit dieser einfachen Lehre.

Diese wenigen und äusserst einfachen Sätze sind die Grundlage der analytisch geometrischen Erforschung der Flächeninhalte der begrenzten ebenen und also auch krumm flächigen Figuren, besonders ihrer rechtwinkligen Projectionen auf Ebenen.

Sei, um den hierbei einzuhaltenden Gang kurz anzudeuten, r ein Parallelogramm, x und y seine rechtwinkligen Projectionen auf zwei zu einer Seite — der Grundlinie — desselben parallele gegen einander senkrechte Ebenen, die also wieder Parallelogramme von gleich langer Grundlinie sind. Lässt man die beiden Projectionsebenen parallel zu sich selbst verrücken, bis sie die beiden parallelen Grundlinien des Parallelogramms r in sich aufnehmen; so hängen die Parallelogramme r, x, y zusammen; folglich, wenn φ den Winkel der Ebene des pro

jicirten Parallelogramms r mit der ersten und eigentlichen Projectionsebene — den *Projectionswinkel* — vorstellt, ist, wie in §. 100, IV,

$$e^{\downarrow\varphi}r = x + \downarrow y.$$

Projicirt man nun eine geradlinig begrenzte, wie immer gestaltete Figur r winkelrecht auf eine Ebene P, mit der sie den Winkel φ macht, und auf eine zur Durchschnittslinie beider Ebenen parallele auf der P senkrechte Ebene Q, so dass dort x und hier y die Projectionsfigur ist; so kann man die projicirte Figur r durch Parallelen zur erwähnten Durchschnittslinie in Stücke zerschneiden, welche entweder selbst Parallelogramme sind, oder wenn sie Dreiecke oder Trapeze sein sollten, dadurch leicht in Parallelogramme verwandelt werden, dass man durch die Mitte einer mit der (parallelen) Grundlinie zusammenstossenden Seite zur selben Grundlinie Parallelen führt. Werden dann noch alle diese Theilungs- und Constructionslinien projicirt, so werden durch sie auch die Projectionsfiguren in Parallelogramme getheilt oder verwandelt. Ist nun Δr ein parallelogrammischer Theil von r, und sind Δx, Δy seine Projectionen in die Ebenen P und Q, folglich wieder parallelogrammische Bestandtheile von x und y; so muss, weil der Winkel φ für jeden solchen Theil Δr, so wie für die ganze Figur r, derselbe bleibt, vermöge Obigem

$$e^{\downarrow\varphi}\Delta r = \Delta x + \downarrow\Delta y$$

sein. Summirt man nun alle solchen Gleichungen, so ist, wenn man diess durch das übliche Summirungszeichen andeutet,

$$e^{\downarrow\varphi}\Sigma\Delta r = \Sigma\Delta x + \downarrow\Sigma\Delta y;$$

daher, weil die Summe aller Theile das Ganze ist, hat man wieder wie vorher

$$e^{\downarrow\varphi}r = x + \downarrow y.$$

Krummlinig begrenzte Figuren endlich können als Grenzen veränderlicher geradlinig begrenzter angesehen werden; mithin gilt diese Gleichung ganz allgemein für die Projectionen x und y jeder beliebig begrenzten ebenen Figur r.

Aus ihr findet man sogleich die bekannten Sätze für die Projectionen von Figuren auf Ebenen $x = r \cos. \varphi, \quad y = r \sin. \varphi$

und daraus die weniger bekannten

$$x \cos. \varphi + y \sin. \varphi = r, \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

Auch die weitere Ausführung dieses Gegenstandes, besonders auf die Projection der Flächen in drei paarweis senkrechte Ebenen, so wie seine Anwendung auf die statischen Momente der Kräfte, wozu vornehmlich die Arbeiten *Cauchy's* in seinen älteren *Exercices de Mathématiques* sich benützen lassen, muss dem Leser überlassen werden.

§. 129.

Vertretung der Figurennetze durch Polygonalen.

Insofern bekanntlich Ebenen in Absicht auf ihr wechselseitiges Senkrecht- und Parallelsein, und überhaupt rücksichtlich ihrer Winkel, die sie mit einander bilden, ganz durch

ihre wo immer geführten Normalen (Senkrechten) vertreten werden können, darf man auch jedes, aus beliebig vielen ebenen Figuren zusammengesetzte *Figurennetz durch eine Polygonale vertreten* lassen, deren einzelne Seiten die entsprechenden Figuren selbst stellvertreten, auf deren Ebenen sie senkrecht stehen. Diese Seiten der Polygonale wird man demnach zuvörderst in Absicht auf *Grösse* durchgehends den von ihnen repräsentirten Figuren *proportionirt* machen. Sind nämlich $A, B, C, \ldots$ diese Figuren, so wird man die Polygonalseiten $a, b, c, \ldots.$ ihnen proportional d. h. so construiren, dass sich $a:b:c:\ldots = A:B:C:\ldots$ verhalten; man wird daher die Einheit der Flächen durch die Einheit der Längen vorstellen. Nachher wird man die *Richtungen* dieser Polygonalseiten dergestalt bestimmen, dass, so wie die Ebenen der Figuren $A, B, C, \ldots$ mit einer gewissen Grundebene P die hohlen (einen gestreckten Winkel nicht übersteigenden) Neigungswinkel $\alpha, \beta, \gamma, \ldots.$ bilden, auch die auf jenen Figurenebenen senkrechten Richtungen der Seiten $a, b, c, \ldots.$ mit einer bestimmten auf der Grundebene senkrechten Grundrichtung p eben diese hohlen Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ machen, also dass der Winkel $ap = AP = \alpha$, $bp = BP = \beta$, $cp = CP = \gamma, \ldots.$ sei. Endlich wird man aus einem beliebigen Punkte O senkrecht auf der Figur A und nach der vorbestimmten Richtung die Strecke a auftragen, aus deren Endpunkte senkrecht auf der Figur B und nach der vorher bestimmten Richtung die Strecke b abschneiden, und wieder aus ihrem Endpunkte senkrecht auf der Figur C und nach der schon ermittelten Richtung die Strecke c auftragen; und in dieser Art fortfahren, bis man endlich auch die letzte Figur des Figurennetzes durch eine proportionirte Seite vorgestellt hat.

Auch kann man vermöge §. 127 noch vor der Construction der Polygonale, die Ebene jeder Figur des Netzes, mit Beibehaltung ihres Winkels gegen die Grundebene, dergestalt drehen, dass ihre Durchschnittslinie zu einer bestimmten Geraden parallel wird, folglich die Durchschnittslinien aller Figurenebenen mit der Grundebene insgesammt unter sich parallel werden. Dann fällt die ganze Polygonale in eine Ebene, die auf allen diesen parallelen Durchschnittslinien zugleich senkrecht steht.

Jede solche Polygonale vertritt demnach das ihr zugehörige Figurennetz hinsichtlich der algebraischen Geltung; und sofort kann der algebraische Ausdruck der Polygonale

$$e^{\downarrow\alpha}a + e^{\downarrow\beta}b + e^{\downarrow\gamma}c + \ldots.$$

auch für den algebraischen Ausdruck des Figurennetzes genommen werden, wenn man nur die Zeichen der Seiten $a, b, c, \ldots.$ für die Zeichen der entsprechenden Figuren $A, B, C, \ldots.$ nimmt. Denn nach den obigen Voraussetzungen ist

$$a : b : c : \ldots. : (e^{\downarrow\alpha}a + e^{\downarrow\beta}b + e^{\downarrow\gamma}c + \ldots.)$$
$$= A : B : C : \ldots. : (e^{\downarrow\alpha}A + e^{\downarrow\beta}B + e^{\downarrow\gamma}C + \ldots.).$$

Daraus erwächst der *Vortheil*, dass man die Lehre von den Projectionen der Figurennetze auf Ebenen ungemein leicht mittels blosser Übersetzung der entsprechenden Benennungen aus der Lehre von den Projectionen der Polygonallinien auf Axen herholen kann; worauf weiter einzugehen hier überflüssig wäre.

§. 130.

Schlussbetrachtung über die in Frage gestellte geometrische Construction des s. g. Imaginären.

Das in §. 2 angeführte Programm stellt die *alternative Forderung*:

1. „Nach sicheren *Regeln* die *Constructionen* anzugeben, die überall, wo sich die Geometer der *imaginären* Grössen bedienen, *versteckt* liegen mögen; oder

2. „wenn diess unmöglich, wenigstens die *Bedingungen* aufzustellen, unter denen jene Grössen *construirbar* sind."

Untersuchen wir demnach vor Allem den *Sinn der ersten* und eigentlichen *Forderung*, und setzen wir, um hierüber ins Klare zu kommen, vorerst anstatt der darin erwähnten Eigenschaft „imaginär" die ihr stammverwandte „negativ," aus der sie doch eigentlich hervorgeht; stellen wir daher die Forderung:

„Nach sicheren *Regeln* die *Constructionen* anzugeben, die überall, wo sich die Geometer der *negativen* Grössen bedienen, versteckt liegen mögen."

Nun ist aber eine *geometrische Construction* die Zusammenstellung mehrerer Linien, Flächen oder Körper, um dadurch andere Linien, Flächen oder Körper zu bestimmen, welche gewissen gegebenen Bedingungen Genüge leisten (*Knar*, Anfangsgr. d. rein. Geom. 1829, Grätz, §. 529); oder sie ist die Anwendung von (räumlichen) Hilfsgrössen, um den Erweis eines Lehrsatzes zu führen, oder die Auflösung einer Aufgabe zu erhalten, als: die Ziehung gerader Linien, Verlängerung der gegebenen, Beschreibung krummer Linien, Legung einer Ebene in Beziehung auf eine andere Ebene, oder auf eine gerade Linie, u. dgl. (*Klügel*, Math. Wörtb. Artik. *Construction*).

Allein dort, wo die Geometer einer Raumgrösse (einer begrenzten geraden oder krummen Linie — einer Strecke oder einem Bogen — einem Winkel, einem Flächen- oder Körperraume) und sofort auch ihrem Zahlwerthe, eine *negative*, d. h. eine einer gewissen zu Grunde gelegten — positiven — Beziehung entgegengesetzte Beziehung beilegen oder zuschreiben, liegt doch — vielleicht nirgends oder höchstens in manchen bloss künstlich geschaffenen Fällen — eine eigenthümliche *Construction* (Erzeugungsweise) jener negativ beziehlichen Raumgrösse *versteckt*. Der Gegensatz der algebraischen Beziehungen zweier solcher Raumgrössen, von welchen (Beziehungen) die eine positiv, die andere negativ genannt wird, gründet sich nicht auf eine Verschiedenheit ihrer *Erzeugung*, sondern lediglich auf eine Verschiedenheit (Entgegengesetztheit) *anderweitiger Umstände*, ihrer gegenseitigen Lage, der Richtung oder des Sinnes ihrer Erstreckung oder Ausdehnung, ja sogar auf eine Verschiedenheit anderer mit ihnen verbundenen auf sie einwirkenden Grössen, mit denen man beide jene entgegengesetzt beziehlichen Raumgrössen zusammenhält; folglich auf eine Verschiedenheit der *Ansicht*, der *Betrachtungsweise* solcher Paare entgegengesetzt beziehlicher Raumgrössen.

Beispiele der ersten Art.

Zwei *Strecken* sind *in der Regel* zu einander entgegengesetzt beziehlich, die eine positiv, die andere negativ beziehlich, wenn sie auf einerlei gerader Linie von demselben Punkte aus nach den beiden entgegengesetzten Richtungen abgeschnitten sind, wie etwa die *Cosinus* der Winkel oder Kreisbogen auf dem Hauptdurchmesser, die *Sinus* auf dem Nebendurchmesser, die *Tangenten* auf der Berührenden des Kreisbogens in seinem Anfangspunkte. Aber *manchmal* erscheinen auch ein paar nicht entgegengesetzt gerichtete, sondern gegen einander geneigte, sich schneidende Strecken algebraisch entgegengesetzt bezogen, als: die *Sehnen* aus einerlei Punkt einer Curve an die Endpunkte in entgegengesetztem Sinne, diess und jenseits dieses Punktes abgeschnittener (selbst wieder entgegengesetzt beziehlicher) Bogen; die *Tangenten* und *Normalen* der gegen die Abscissenaxe oder gegen den Pol concav und convex gestellten Curven; die *Senkrechten* aus einerlei Punkt auf Geraden in einerlei Ebene (wie etwa auf Richtungen von Kräften, deren statische Momente in Bezug auf den Punkt bestimmt werden). Und doch werden jede zwei solche entgegengesetzt beziehliche Strecken *auf einerlei Weise* nach demselben Verfahren oder Gesetze *construirt*; die Cosinus und Sinus durch (orthogonale) Projection des Endpunktes des jedesmaligen Bogens auf den Haupt- und Nebendurchmesser; die Tangenten durch Verlängerung des Halbmessers dieses Endpunktes bis zum Einschnitt in die Berührungslinie am Anfangspunkte, u. s. w.

Beispiele der zweiten Art.

Sehr oft zeigt sich auch eine und dieselbe nach der nämlichen Richtung genommene Strecke, je nachdem man sie sonst ansieht, auf diesen oder jenen anderweitigen Gegenstand bezieht, bald positiv bald negativ beziehlich. Dieselbe Strecke, die wir den positiven *Cosinus* eines spitzigen Winkels nennen, ist genau in der nämlichen Richtung genommen, auch der negative Cosinus seines stumpfen Nebenwinkels; die nämliche und gleichgerichtete Strecke, die wir den positiven *Sinus* eines hohlen Winkels nennen, ist auch der negative Sinus seines erhobenen (ihn zum vollen Winkel ergänzenden) Winkels; dieselbe Strecke ganz gleich gerichtet ist die positive *Secante* eines Winkels und die negative Secante des um einen gestreckten (180°) grösseren oder kleineren Winkels. Dieselbe begrenzte gerade, gebrochene, krumme oder gemischte *Linie* in entgegengesetztem Sinne, einmal von dem einen Grenzpunkte gegen den andern hin, ein andermal von diesem gegen jenen zurück, aufgefasst ist algebraisch entgegengesetzt, dort positiv, hier negativ beziehlich. Ein Gleiches gilt von jedem *Winkel*, wenn man ihn als durch entgegengesetzte Ablenkungen einer beweglichen Richtung entstanden ansieht. — Jene Strecken, diese begrenzte Linie und der Winkel, die bald positiv, bald negativ bezogen sind, können aber nur allein *durch einerlei Construction* hervorgebracht werden.

Aus dieser Untersuchung folgt daher *entschieden*, dass bei den negativ beziehlichen Raumgrössen *keineswegs* jederzeit und nothwendig eine *eigenthümliche* geometrische *Construc-*

tion versteckt zu Grunde *liege*, sondern dass die Positivität oder Negativität der Beziehung einer Raumgrösse bloss durch eine eigenthümliche Ansicht oder *Betrachtungsweise* dieser Raumgrösse, durch den besonderen Gesichts- oder Standpunkt, aus dem man sie besieht, bedingt und entschieden werde.

Allerdings können zufällig oder absichtlich solche Gruppirungen (Anordnungen, Zusammenstellungen) von mancherlei Raumdingen hervorgebracht werden, welche (Gruppirungen) entweder einzeln besehen oder an einander gehalten, die algebraischen Beziehungen mancher Raumgrössen, aus gewissen Gesichtspunkten oder bei bestimmten Ansichten, als negativ erscheinen oder erklären lassen. Erlaubt man sich danach derlei Gruppirungen, nach einem freilich sehr üblichen Sprachgebrauche „geometrische Constructionen solcher negativ bezüglichen Raumgrössen“ zu nennen, wozu auch wir, um nicht unverständlich zu werden, gezwungen sind: so mag diess vielleicht durch die erzielte Abkürzung der Rede entschuldigt werden; allein diese kurze missbräuchliche Sprechweise vermag doch keineswegs zu widerlegen, dass *nicht jene* Gruppirungen oder *Constructionen* von Raumgrössen schon an und für sich, sondern erst und eigentlich die *besonderen Beschauungen* derselben, diese Grössen manchmal zu negativ beziehlichen machen.

Was nun hier von den negativen Grössen gilt, das muss nothwendig auch von den s. g. *imaginären* Grössen gelten. Denn das Imaginäre betrifft so wie das Positive und Negative, von dem es herstammt, nicht den Betrag, das Wiegross der Grössen, sondern lediglich gewisse Eigenschaften, Zu- oder Umstände, Rücksichten, zumeist Beziehungen genannt. Mithin machen keineswegs jene verborgenen und geheimnissvollen Constructionen allein schon die Raumgrössen imaginär, oder nach uns die algebraischen Beziehungen dieser Grössen ablenkend, insbesondere transvers; sondern erst und eigentlich die Gesichtspunkte, von denen aus man derlei Grössen beschaut. Z. B. Die algebraische Beziehung einer und derselben Seite einer gebrochenen Linie ist, gemäss den Ergebnissen unserer bisherigen Untersuchungen, in Hinsicht auf eine der Richtungen derjenigen Geraden, von der sie eine Strecke ist, *positiv*, hinsichtlich der andern *negativ*; rücksichtlich der Richtungen einer auf der Seite senkrechten Geraden *transversiv*; endlich in Absicht auf jede andere Richtung *überhaupt abweichend*, ablenkend: und doch kann diese Seite bloss auf eine einzige Weise construirt (erzeugt) worden sein.

§. 113.

Fortsetzung.

Aus dieser Untersuchung wird nunmehr zur Genüge *einleuchten*, dass die erste Forderung des erwähnten Programms — wie zum Theil darin selbst schon geahnt worden ist — in der gewünschten Aufdeckung jener mystischen Constructionen der allerlei imaginären geometrischen Grössen etwas *Unmögliches* verlangt und sofort einer *Berichtigung* bedarf. Wir halten dafür, dass man zu diesem Zwecke die zweite Forderung hätte voranschicken und beide wie folgt hätte stellen sollen:

1. „Es seien die *Bedingungen aufzustellen*, unter denen imaginäre Grössen geometrisch *construirbar* sind; d. h. diejenigen zureichenden und bestimmten *Grundansichten* festzustellen, denen gemäss Raumgrössen als imaginär *) sich ansehen, durch imaginäre Zahlen sich ausdrücken lassen, und daher auch wieder umgekehrt zur Vorstellung imaginärer Grössen oder Zahlen verwendet werden können."

2. „Diesem zufolge seien sichere Regeln anzugeben, nach denen sich nicht bloss einzelne imaginäre Grössen und Zahlen, sondern auch die Ergebnisse aller (Grund- und zusammengesetzten) Rechnungen mit ihnen geometrisch construiren (durch eigens erzeugte Raumgrössen darstellen, vorstellig machen) lassen."

Halten wir endlich an diese *nur so* richtig zu stellenden Forderungen das bisher von unserer Abhandlung Geleistete, so deucht uns, dass daran nichts Wesentliches mangele. Denn

A. als jene *Bedingungen* oder *Grundansichten* haben wir im Vorhergehenden folgende aufgestellt und ausführlich erörtert:

α) Das Imaginärsein kann, gleich dem Positiv- und Negativsein, nicht dem Betrage oder Wiegross (der Grösse) der Grössen sondern nur gewissen Beschaffenheiten, Umständen oder gewöhnlich so genannten (algebraischen) *Beziehungen* zukommen; wesswegen die Grössen eigentlich „positiv-, negativ- und imaginär- beziehlich oder -bezogen" heissen sollten. (§. 8 — 12 und 21).

β) Bei vielerhand algebraischen Grössenbeziehungen gewahrt man nicht bloss einen Gegensatz, sondern auch — was sich weder verkennen noch abläugnen lässt — mancherlei Ablenkung (Abweichung) derselben, (§. 23 — 28); daher findet man zu mancher Grund- oder *positiven* Beziehung nicht bloss eine entgegengesetzte — *negative* — sondern auch vielerlei ablenkende, unter denen die den *geradzähligen* Wurzeln aus negativ beziehlichen Zahlen entsprechenden Beziehungen mit gewissen *imaginären* übereinkommen (§. 32), und namentlich die imaginäre Beziehung der *zweiten* Wurzel aus jeder negativ bezogenen Zahl nach uns eine *transversive* ist, (§. 43). Für allgemeine Rechnungen gesteht man übereinkömmlich das Vorhandensein solcher Grössenbeziehungen überhaupt bedingungsweise zu, (§. 27). Eine weitere Untersuchung lehrt, dass die s. g. *complexen* Grössen mit eigenthümlich ablenkend beziehlichen sich identificiren lassen, (§. 80, 81).

γ) Sollen nun, diesen Ansichten gemäss, irgend welche Raumgrössen imaginäre, oder allgemeiner gesprochen, complexe Grössen, oder nach uns ablenkend beziehliche Grössen vorstellen können; so müssen derartige *Raumgrössen* nothwendig nicht bloss in entgegengesetzten (directen), sondern *auch in ablenkenden Beziehungen betrachtet werden können*; wie solches, nach unserem Erweise, bei Strecken, Winkeln und ihren Kreisbogen, und bei ebenen Figuren in der That Statt findet.

δ) Zugleich müssen aber *solche Raumgrössen auch noch so beschaffen* sein, dass, wenn ein Paar beliebige und wie immer unter sich verschiedentlich ablenkend bezogene Grössen *A*, *B* durch eine dritte *R*; und ein zweites Paar eben so bezogene Grössen *A'*, *B'* durch

*) im bekannten algebraischen Sinne

eine dritte R', algebraisch ersetzt werden können; auch bei denselben Beziehungen *das Paar der Summen* $A + A'$ und $B + B'$ jener A und B *durch die Summe* $R + R'$ dieser R *algebraisch vertreten* werde (§. 96); was, wie wir (in §. 124) dargelegt haben, *bei Winkeln und ihren Kreisbogen nicht Statt findet*; wesswegen imaginäre oder ablenkend beziehliche Grössen bloss durch *Strecken* und ebene *Figuren* geometrisch sich construiren (vorstellen) lassen.

B. Hat man diese Grundansichten und Bedingungen als zulässig angenommen, so muss es genügen, bloss zu zeigen, *wie sich* einzelne imaginäre (ablenkend beziehliche) Grössen und *die Ergebnisse* der mit ihnen ausgeführten siebenerlei *Grundrechnungen* (Addiren, Subtrahiren; Multipliciren, Dividiren; Potenziren, Radiciren, Logarithmiren) durch Raumgrössen — namentlich durch Strecken und ebene Figuren — *geometrisch construiren* (darstellen) lassen, was wir in §. 88—122 und 125—129 mit genügender Umständlichkeit gethan zu haben glauben. Denn jede andere *zusammengesetzte Rechnungsweise* kann nach und nach aus jenen Grundrechnungen zusammengesetzt und daher ihr Ergebniss allmälich nach den für diese Grundrechnungen aufgestellten Constructionsweisen construirt werden.

D. Gedrängte Zusammenstellung der bisherigen Leistungen der Mathematiker in der geometrischen Construction der s. g. imaginären Grössen.

§. 132.

I. Heinrich Kühn. 1736 *und* 1750.

Der Erste, welcher überhaupt die Nichtunmöglichkeit der sogenannten unmöglichen Grössen zu behaupten sich erkühnte, und die räumliche Darstellbarkeit derselben nachzuweisen sich bemühte, war der Deutsche *Heinrich Kühn,* Professor zu Danzig, gestorben am 8. October 1769. In den „Novi Commentarii Academiae scient. imper., Petropolitanae, 4°, tom. III., ad annum 1750 et 1751, Petropoli 1753," auf S. 170 bis 223, also auf 54 Quartseiten, veröffentlichte er seine

> „Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis."

Einleitend erzählt er, er habe schon in dem „Commercio Mathematico Petropolitano anni **1736**," bei Gelegenheit der ihm von *Euler* vorgelegten Aufgabe, „die dritte Potenz der Zahl $-1 \mp \sqrt{-3}$ aufzusuchen," welche jedenfalls $= 8$ ist, ausser der echten Erklärung des Verhältnisses auch noch die wahren Begriffe der gleichartigen Grössen so wie der primitiven positiven, und überdiess die genetischen Definitionen der derivativen Grössen, sowohl der dem Nichts gleichen als auch der privativen (negativen) und der positiven ableitbaren Grössen aufgestellt; er habe gezeigt, dass sie alle unter sich gleichartig, reell und nachweisbar (assignabiles) sind. Aber von den Grössen, welche man imaginär zu nennen pflegt, habe er dazumal noch keine genetische Definition gehabt und folglich auch nicht den Vorgang zu zeigen vermocht, durch den die imaginären Grössen darzustellen wären;

obwohl er schon zu jener Zeit gegen die herrschende Lehre *behauptet* habe, „*auch diese Grössen seien nicht unmöglich, sondern gleich den übrigen ableitbaren Grössen vollkommen reell und nachweisbar.*"

Zur Rechtfertigung dieser Behauptung betrachtet *Kühn* vier, in den rechten Winkeln (Quadranten) zweier winkelrechten Axen um ihren Durchschnittspunkt herumliegende congruente *Rechtecke*, von deren Seiten a und b die gleichen entgegengesetzt liegen, wie in Fig. 22. Da sind ihm jede zwei in einem Paar Scheitelwinkel, gleichsam einander entgegen liegende (opposita) Rechtecke *einstimmig* und jede zwei in einerlei Axe an einander grenzende *entgegengesetzt*. Bei der Bemessung dieser Rechtecke, die er nach der Ordnung der Quadranten mit α, β, γ, δ bezeichnet, stellt er zur Unterscheidung bald diese bald jene Seite (gewisser Massen als Grundlinie) voraus. So erklärt er namentlich

im 1. Quadranten das Rechteck $\alpha = +a \cdot +b = +ab$
„ 2. „ „ „ $\beta = -b \cdot +a = -ba$
„ 3. „ „ „ $\gamma = -b \cdot -a = +ba$
„ 4. „ „ „ $\delta = -a \cdot +b = -ab.$

Hierauf lässt er die Rechtecke, indem er $b = a$ macht, in *Quadrate* übergehen und findet

das Quadr. $\alpha = +a \cdot +a = +a^2$, das Quadr. $\beta = -a \cdot +a = -a^2$
„ „ $\gamma = -a \cdot -a = +a^2$, „ „ $\delta = -a \cdot +a = -a^2$.

Dann erklärt er umgekehrt die *zweitgradige Wurzel* aus dem Flächeninhalte des Quadrates für die *Seite des Quadrates* und erhält

für das Quadr. α die Seite $= \sqrt{+a \cdot +a} = \sqrt{+a^2} = +a$
„ „ „ γ „ „ $= \sqrt{-a \cdot -a} = \sqrt{+a^2} = -a$
„ „ „ β „ „ $= \sqrt{-a \cdot +a} = \sqrt{-a^2} = +\sqrt{-a^2}$
„ „ „ δ „ „ $= \sqrt{-a \cdot +a} = \sqrt{-a^2} = -\sqrt{-a^2}$,

indem er, wegen der Opposition der Quadrate β und δ, vor die zwei letzteren $\sqrt{\ }$ die Zeichen $+$ und $-$ stellt. Daraus folgert er nun:

„Und so sind die Seiten oder Wurzeln der negativen Quadrate β und δ zwar imaginäre Grössen, aber dennoch darstellbar (assignabiles); weil, sobald das Quadrat β oder δ, welches neben dem Quadrate α liegt, construirt oder dargestellt ist, auch zugleich dessen Seiten dargestellt sind."

Enthält auch diese Grundlage der Forschungen *Kühn's* manches Richtige, so ist sie doch leider ohne genügende Rechtfertigung hingestellt. Wie sie unseren Ansichten gemäss begründet werden müsse, haben wir in §. 107 und 113 genugsam erörtert.

Nachdem *Kühn* auf die beschriebene Weise die Construction der Wurzelwerthe der *reinen zweitgradigen* (quadratischen) *Gleichungen*, welche auf die allgemeine Form $x^2 \mp a^2 = 0$ sich zurückleiten lassen, gelehrt hat, zeigt er, wie die Wurzelwerthe der *vollständigen zweitgradigen Gleichungen* geometrisch, durch Seiten von Rechtecken und Quadraten, dargestellt

werden können. Endlich wendet er seine Methode auch auf *drittgradige* (cubische) *Gleichungen* an, indem er an die Stelle zweier winkelrechten Axen mit 4 Quadranten drei winkelrechte Axen mit 8 *Raumoctanten*, und danach an die Stelle der Rechtecke *Parallelepipede* und anstatt der Quadrate *Würfel* setzt.

Diese unstreitig geistreichen, wenn gleich vielleicht nur schwer fruchtbar zu machenden, Ansichten *Kühn's* scheinen nur wenig beachtet und noch weniger gewürdigt worden zu sein. Ich fand ihrer gedacht 1. in „*Busse's* Erster Unterricht in der algebr. Auflösung u. s. w. 1. Thl., 2. Aufl., Freiberg, 1808, S. 264, Note", wo gesagt wird, dass in den „Göttinger gelehrten Anzeigen v. J. 1806," ein Recensent „die Frage wegen der Meinung aufgestellt, die schon *Kühn* in Petersburg über die Nichtunmöglichkeit der s. g. unmöglichen Grössen geäussert haben soll," und 2. in dem Programm der Jablonowski'schen Ges. d. W. für d. J. 1838, wo erwähnt wird, dass einer der Preisbewerber „den Versuch *Kühn's*, die imaginären Grössen zu construiren, widerlegt habe."

§. 133.

II. *Buée*. 1805.

Erst nach mehr als einem halben Jahrhundert hinter *Kühn*, im J. 1805, ergriff denselben Gegenstand der Franzose *Buée*. Sein französisch geschriebener Aufsatz befindet sich in den „Philosophical Transactions for year 1806 (part. I, London, 1806)" unter dem Titel:

„Mémoire sur les quantités imaginaires. Par M. *Buée*. Communicated by Will. *Morgan* Esqu. F. R. S. Read June 20, 1805";

und reicht von S. 23 bis 88, umfasst also 66 Quartseiten.

Buée nimmt das in der Algebra vorkommende Zeichen — 1 in zweifacher Bedeutung. Einmal da, wo die Algebra als allgemeine Arithmetik betrachtet wird, ist ihm das negative Zeichen das *Zeichen der Subtraction*; dagegen wo die Algebra als allgemeine Sprache angesehen wird, ist ihm dasselbe ein *Qualitätszeichen*. Daraus zieht er den Schluss:

„Als arithmetische Operationszeichen sind + und — die Zeichen der Addition und Subtraction; als geometrische Operationszeichen aber deuten sie entgegengesetzte Richtungen an."

Sofort erklärt er die $\sqrt{-1}$ als *Zeichen der Perpendicularität*, und beweist diess

1. dadurch, dass er den auf einem Durchmesser eines Kreises senkrechten Halbmesser als die mittlere geometrische Proportionale zwischen den zwei entgegengesetzten Hälften oder Halbmessern, + 1 und — 1, des Durchmessers ansieht, und danach als durch $\sqrt{+1.-1} = \sqrt{-1}$ zu bezeichnend erklärt; dann noch

2. dadurch, dass er ein Quadrat um eine seiner Spitzen dreht, bis jede Seite desselben einen rechten Winkel durchstreift hat, wodurch es aus seiner ersten positiven Lage in die negative übergeht, daher es, wenn man es im ersten Falle mit +1 bezeichnet, im zweiten durch —1 zu bezeichnen ist, und folglich seine Seite dort das Zeichen +1 oder —1 und hier das Zeichen $+\sqrt{-1}$ oder $-\sqrt{-1}$ erhalten muss.

In diesem Geiste fährt *Buée* fort und wendet seine Raisonnements sowohl auf Linien als auch auf Flächen an. Leider verfällt er dabei in mancherlei Irrthümer. So meint er z. B., dass die $\sqrt{-1}$, obschon sie eigentlich die Perpendicularität andeutet, doch auch jede andere Qualität angeben könne, wofern man nur rücksichtlich dieser eben so, wie hinsichtlich jener, zu argumentiren vermöge, was jedoch geradezu unmöglich ist. An einer anderen Stelle will er beweisen, dass $(\sqrt{-1})^n = n\sqrt{-1}$ sei, was sich doch nicht begreifen lässt. Aber trotz dieser Mängel sind seine allgemeinen Grundansichten und Betrachtungen gut.

Auch *Buée's* Ansichten fanden bei dem mathematischen Publicum wenig Beifall. Besonders eifert dagegen Franz v. *Spaun* in seiner „Anleitung zur geradlin. Trigonometrie. 4. München 1818, Vorrede," indem er dem Recensenten von Buée's Abhandlung (im 14. Bd. des Edinburger Journals) den Vorwurf macht, „er sehe die geometrischen Zeichen als magische Symbole an, die zwar nichts bedeuten, aber dennoch durch ihre innere Kraft Wahrheiten entwickeln." Eben so verdächtigend lautet die Anzeige *Egen's* in seinem „Handb. der allg. Arithm. 8. Berlin 1819. 20. 2. Aufl., 1833, S. 196, §. 129."

§. 134.

III. C. V. Mourey. 1828.

Im J. 1828 veröffentlichte der Franzose *C. V. Mourey* eine kleine Schrift, betitelt: „La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires. — Dédié aux Amis de l'Evidence. — Par *C. V. Mourey.* Paris. Chez Bachelier, libraire et chez l'auteur rue des Quatre-Vents, n⁰. 8.; 1828, pet. 8⁰, pages XII et 144, avec 3 planches."

Der *Grundbegriff* seiner Lehre ist der *Weg* oder *Zug* (chemin), welcher als in einem einzigen Sinne fortführend angesehen wird. Auf jeder geraden Linie *AB* kann man sich zwei Wege nach entgegengesetztem Sinne vorstellen, nämlich den einen von *A* nach *B*, den anderen von *B* nach *A*.

Damit zwei *Wege gleich* seien, müssen sie nicht bloss einerlei *Länge*, sondern auch einerlei *Richtung* haben. Danach sind sämmtliche Halbmesser eines Kreises, als vom Mittelpunkte an den Umkreis führend, lauter ungleiche Wege.

Mourey macht (n. 1—3) aufmerksam auf die Schwierigkeit der Algebra bei der Subtraction einer grösseren Grösse von einer kleineren und wenn ein Subtractionselement unbekannt oder willkürlich ist. Er bezeichnet als Ersatzmittel der Subtraction die *Reise* (voyage) eines Reisenden, indem man anstatt eine Reise- oder Wegstrecke abzuziehen die umgekehrte hinzufügen kann, und weil man alle anderartigen Grössen durch Linien vorstellen und diese selbst wieder als Wegstrecken ansehen kann.

Danach (n. 3 und 4) nennt er *directive Linie* oder *Weg* jede (gerade Linie, welche man so ansieht, als stelle sie eine Reise vor, d. h. als geleite sie nach einem einzigen Sinne

weiter. Von den zwei Grenzpunkten eines Weges ist der eine der *Anfangspunkt* (origine), der andere der *Endpunkt* (terme), wonach man also AB von BA unterscheidet. Demgemäss werden auch die Grössen und die Mathematik sammt ihren Zweigen in *directive* und *nicht-directive* unterschieden.

Zwei *Wege* (n. 5) heissen *auf einander folgende* (sont de suite), wenn das Ende des ersten der Anfang des zweiten ist. Die *Summe zweier auf einander folgender Wege* ist der alleinige Weg, der vom Anfange des ersten Weges zum Ende des zweiten führt. Die Gleichung $AB + BC = AC$ ist also das *Grundprincip*, mögen die Punkte A, B, C in einer Geraden liegen oder nicht.

Daraus ist (n. 7) leicht ersichtlich, was die *Summe mehrerer* auf einander folgender *Wege* sei.

Erwägt man (n. 8), dass parallele Geraden auch gleiche Richtungen haben, folglich gleichgerichtete parallele gleichlange Wege auch directiv gleich sind, so begreift man leicht (n. 9), wie auch *unzusammenhängende* (nicht nach einander folgende) *Wege summirt* werden können.

Hierauf (n. 13, 14) bespricht *Mourey* die umgekehrten, d. h. gleichlangen, aber entgegengesetzten Wege und zeigt, dass das Subtrahiren eines Weges mit dem Addiren des umgekehrten einerlei sei. Er bemüht sich (in n. 15), (freilich mit zweifelhaftem Erfolge) die Schwierigkeit zu beseitigen, mit welcher man etwa an die Vorstellung von Zahl und Einheit jene der Richtung und Entgegensetzung knüpfen könnte. Nach ihm (n. 16—19) sind *Zahlen positiv oder negativ*, je nachdem sie einerlei oder entgegengesetzte Richtung mit der Einheit haben.

Den wichtigsten Begriff gibt *Mourey* (n. 21—23) in seinem directiven oder *Richtungswinkel* (angle directif) oder *Dreher* (verseur). Haben nämlich zwei Wege OA, OB denselben Ursprung O und dieselbe Länge; so wird aus dem Wege OA der Weg OB entstehen, wenn man jenen um seinen Anfang O von rechts nach links drehen und den Winkel α beschreiben lässt. Es ist nämlich OA gedreht um α gleich OB oder kurz geschrieben $OA_{\alpha} = OB$.

Der Winkel α, welcher von OA auf OB führt, ist demnach der Dreher von OA, und das *Richtungsverhältniss* von OB zu OA.

Übereinkömmlich mag festgesetzt werden, dass dieser directive Winkel als im Kreise fliessend angesehen werde, und zwar von der Rechten zur Linken in Absicht auf einen im Scheitel stehenden Beschauer. Derjenige Schenkel, von dem aus der Winkel führt, ist der *Anfang* oder *Ursprung*, und der, zu dem er führt, das *Ende* (terme) desselben. Daraus ist leicht einzusehen, dass ein *directiver Winkel positiv* oder *negativ* ist, je nachdem er von rechts nach links oder umgekehrt fliesst.

Zur *Winkeleinheit* wählt *Mourey* den von rechts nach links fliessenden *rechten Winkel*.

Sind demnach Fig. 35, in einem Kreise, die Durchmesser AC, BD auf einander senkrecht, so ist der Halbmesser $OB = OA_1 = OA_{-3}$, $OC = OA_2 = OA_{-2}$, $OD = OA_3 = OA_{-1}$, und sogar $OA = OA_0 = OA_4 = OA_{-4}$.

Macht man (n. 25.) den Winkel $AOE = \alpha$ und $EOF = \beta$, so ist $OE = OA_\alpha$, $OF = OE_\beta = (OA_\alpha)_\beta$. Aber es ist auch $AOF = AOE + EOF = \alpha + \beta$, daher auch noch $OF = OA_{\alpha + \beta}$. Mithin ist $(OA_\alpha)_\beta = OA_{\alpha + \beta}$, oder $(a_\alpha)_\beta = a_{\alpha + \beta}$.

Erwägt man noch (n. 26), dass directive Winkel, die sich beliebig oft um 4 rechte unterscheiden, einander gleichgelten; so muss $a_\alpha = a_{\alpha + 4n}$ sein, wenn n eine ganze Zahl vorstellt, und (n. 27) jeder negative Winkel kann durch einen positiven ersetzt werden, z. B. $a_{-1} = a_{-1+4} = a_3$.

Ferner ist (n. 28) das Negativzeichen — gleichbedeutend mit dem Dreher ± 2. Denn es ist $-OA = OC = OA_2 = OA_{-2}$ und $-OE = OG = OA_\alpha = OA_{\alpha \pm 2}$.

Directive Zahlen ergeben sich nun (n. 29), wenn man den Halbmesser OA zur Einheit nimmt, da dann alle anderen Halbmesser dieses Kreises alle mit der Einheit gleichen, aber verschieden gerichteten Zahlen vorstellen; und wenn man noch erwägt, dass es auf jeder Richtung unzählig viele Zahlen gibt, die unter sich gleichgerichtet, aber verschieden lang sind, weil dann sämmtliche Halbmesser der concentrischen Kreise die gesammten anderen Zahlen vorstellen.

Directive Multiplication und Division (n. 38—49). Um eine Grösse durch eine directive Zahl zu multipliciren, muss man den Multiplicand, mittels der eigentlich so genannten Multiplication und Division, und dann mittels der Drehung, gerade so behandeln, wie man die Einheit behandelt, um den Multiplicator darzustellen. Z. B. Um durch $\left(\frac{9}{4}\right)_{\frac{2}{3}}$ zu multipliciren, muss man multipliciren mit 9, dividiren durch 4 und drehen um $\frac{2}{3}$. Diess kommt darauf hinaus, dass mit $\frac{9}{4}$ multiplicirt und um $\frac{2}{3}$ gedreht werde.

Potenzen und Wurzeln. Nun übergeht *Mourey* zu der wichtigsten Untersuchung. In n. 51 beweist er, dass

$\{(a^m)_r\}^n = (a^{mn})_{rn}$ ist, z. B. $(1_2)^2 = 1_4 = 1$, $(1_{\frac{4}{3}})^3 = 1_4 = 1$, $(1_{\frac{8}{3}})^3 = 1_8 = 1$.

Umgekehrt findet er daher (n. 52, 53)

zur Gleichung $x^2 = 1$ die Wurzelwerthe $1 = OA$, $1_2 = -1 = OC$,

zur $x^3 = 1$ die Wurzelwerthe $1 = OA$, $1_{\frac{4}{3}} = OF$, $1_{\frac{8}{3}} = OG$,

zur $x^4 = 1$ „ „ $1 = OA$, $1_1 = OB$, $1_2 = OC$, $1_3 = OD$,

und überhaupt zur Gleichung $x^n = 1$ die Wurzelwerthe 1, $1_{\frac{4}{n}}$, $1_{\frac{8}{n}}$, $1_{\frac{12}{n}}$, … $1_{\frac{4m}{n}}$ … $1_{\frac{4(n-1)}{n}}$.

Weiter diese Reise fortzusetzen ist unnütz, weil dieselben Glieder *periodisch wiederkehren.* Die Gleichung $x^n = 1$ hat also n Wurzelwerthe. „Da hat man demnach die sämmtlichen Wurzeln aus Eins, und die *vorgeblichen imaginären Grössen!*"

Sonach erhält er (n. 54—57) die Wurzelwerthe der Gleichung $x^n = 1_\alpha$ allgemein ausgedrückt durch $x = 1_{\frac{\alpha + 4r}{n}} = \sqrt[n]{1}$,

wo r eine beliebige ganze Zahl ist. Insbesondere (n. 58) ist

$$\sqrt[n]{-1} = 1_{\frac{2}{n}},\ 1_{\frac{6}{n}},\ 1_{\frac{10}{n}},\ \ldots\ 1_{\frac{2+4(n-1)}{n}}.$$

Diese gedrängte Übersicht wird genügen, um den Weg zu überschauen, auf welchem *Mourey* den imaginären Wurzeln ausweicht. Im weiteren Verlaufe seiner Schrift betrachtet er nur noch ganz kurz die *Logarithmen* (n. 65), dagegen (n. 66—73) ausführlicher die *Grundzüge der directiven Trigonometrie*; welche er sofort (n. 74—77) auf die Operationen des Kalküls anwendet. Hier zeigt er, dass $1_x = \cos. x + (\sin. x)_1$ ist, wonach er die *Wurzeln aus* 1 *goniometrisch* und complex *auszudrücken* vermag.

Seine ganze Lehre der directiven Algebra *wendet* er sonach (n. 78) auf die umständliche Auflösung der drittgradigen Gleichungen und (n. 79) auf die algebraischen Gleichungen überhaupt insoweit *an*, dass er darthut, jede solche Gleichung habe wenigstens Einen Wurzelwerth; endlich (n. 80—82) benützt er sie noch bei den ebenen Curven.

Sein Werkchen *beschliesst* er (n. 83) mit den *Bemerkungen*, 1. dass er hier mehrere Arten von Rechnungsausdrücken als: $a^{\sqrt{-1}}$, $a_{\sqrt{-1}}$, $\sin. (\sqrt{-1})$, . . . mit Stillschweigen übergehen müsse, dass er sie dagegen in seinem, schon in der Vorrede (S. IX) erwähnten grossen Werke ausführlich bespreche und von ihnen nachweise, dass sie insgesammt directive Linien ausdrücken, welche mit 1 und 1_1 in derselben Ebene liegen; und

2. deutet er an, dass man die Wege nicht bloss a) in einerlei *Geraden* oder b) in der nämlichen *Ebene*, sondern auch noch c) im *Raume* überhaupt betrachten könne, so dass die Wissenschaft im ersten Falle nur zwei einander entgegengesetzte Richtungen, im zweiten alle Halbmesser eines Kreises, im dritten alle Halbmesser einer Kugel umfasst.

Nach dieser Darstellung bleibt es gewiss sehr zu bedauern, dass *Mourey* seinen gelehrten Landsleuten so weit im Geiste vorangeeilt war, dass sie sein kleines, aber inhaltreiches — freilich wohl auch manche neue und abschreckende Namen und Zeichen benützendes — Werkchen nicht zu begreifen und zu würdigen fähig oder geneigt waren, und dass eben desswegen sein grosses Werk wahrscheinlich verloren ging. Denn spätere Bearbeiter dieses Feldes haben grossentheils nur das bereits von ihm Entdeckte wieder neu entdeckt.

§. 135.

IV. John Warren. 1828.

Gleichzeitig mit *Mourey* und mit dessen Ansichten zusammentreffend, ohne jedoch die angeführte Schrift desselben gekannt zu haben, beschäftigte sich auch der Engländer John *Warren* mit der Construction der imaginären zweitgradigen Wurzeln.

Zuerst gab er eine, in der Edinburger Akademie gelesene Abhandlung, auf Kosten der Cambridger Universität, abgesondert im Druck heraus, unter dem Titel: „A Treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities. By the Rev. John *Warren*, A. M. Fellow and Tutor of Jesus College, Cambridge; Cambridge, 1828;

Sold by T. Stevenson and J. et J. Deighton; gr. 8. 154 Seiten; wurde im April 1828 ausgegeben."

Nachher theilte er in den Philosophical Transactions for year 1829 zwei Aufsätze mit, und zwar

1. S. 241 — 254: Consideration of the objections raised against the geometrical representation of the square roots of negative quantities. By the Rev. J. *Warren*, ... Communicated by Thomas *Young*, M. D. Foreign Secretary to the Royal Society. Read February 19, 1829.

2. S. 339 — 359: On the geometrical representation of the powers of quantities, whose indices involve square roots of negative quantities. By the Rev. J. *Warren* . . . Communicated by the President. Read June 4, 1829.

Herr *Warren*, derzeit an der Pfarre zu Hundington in der englischen Grafschaft gleichen Namens, hat die ausgezeichnete Güte gehabt, mir nicht bloss Mourey's Schrift auf die Zeit ihres Gebrauches zu leihen, sondern auch seine eigenen drei Abhandlungen zu verehren, welche mir am 20. Febr. 1847 zugekommen sind.

A. Sein *Hauptwerk* ist die *erste Abhandlung*, von der ich jedoch hier nur einen sehr gedrängten Überblick zu geben vermag, aus der sich der Geist, in welchem er den Gegenstand aufgefasst hat, entnehmen lassen wird.

I. *Kap.* Erklärungen, Addition, Subtraction, Proportion, Multiplication, Division, Brüche und Erhebung zu Potenzen.

1. „Alle geraden Linien, die in einer gegebenen Ebene aus einem gegebenen Punkte gezogen sind, werden dargestellt *nach Länge und Richtung* von algebraischen Grössen; und in der hier folgenden Abhandlung wird, wo immer das Wort *Grösse* gebraucht wird, es so verstanden werden, als bezeichnend eine *Linie*."

2. „Der gegebene Punkt, von dem aus eine gerade Linie gemessen wird, heisst der *Ursprung (Anfang)* derselben."

3. „*Die Summe zweier Grössen ist* die Diagonale des Parallelogramms, dessen Seiten die zwei Grössen sind. Also (Fig. 36)

wenn a vorstellt die AB nach Länge und Richtung
und b „ „ AC „ „ „ „

und wenn das Parallelogramm $ABDC$ vollendet und die Diagonale AD gezogen wird, so stellt $a + b$ die AD nach Länge und Richtung dar."

4. „Die *Subtraction* ist das Umgekehrte der Addition. Wenn also von irgend zwei Grössen a und b die Summe c ist, so heisst b der *Unterschied*, welcher durch das Subtrahiren der a von der c entsteht.

5., 6. Summe unabhängig von der *Ordnung* ihrer Summanden.

7. „Sind (Fig. 37) irgend einige Grössen AB, AC, AD, gegeben, zieht man $BE \# AC$ und $EF \# AD$, und zieht man die AF, so ist $AF = AB + AC + AD$. Denn zieht man noch AE, CE, so ist $ABEC$ ein Parallelogramm, und seine Diagonale $AE = AB + AC$. Aus ähnlichem Grunde ist $AF = AE + AD$, daher ist $AF = AB + AC + AD$.

8. „Wenn a eine Grösse in einer gewissen Richtung vorstellt, so wird $-a$ eine der vorigen in Länge gleiche Grösse vorstellen, die aber in der *entgegengesetzten Richtung* gezogen ist. Also wenn AB (Fig. 38) von a vorgestellt und BA bis C so verlängert wird, dass AC der AB in Länge gleich ist, so wird AB vorgestellt von $-a$.

9. Der Unterschied, welcher durch das Abziehen der b von a entsteht, ist $= a + (-b)$. Denn sei (Fig. 39) $AB = a$, $AC = b$. Man ziehe BC und vollende das Parallelogramm $ACBD$. Dann ist $AB = AC + AD$ oder $a = b + AD$, also AD der fragliche Unterschied. — Überdiess verlängere man CA bis E um $AE = AC$, und ziehe ED. Weil nun $DB \mathrel{\#} AC$, so ist auch $DB \mathrel{\#} EA$; folglich ist $EDBA$ ein Parallelogramm, und die Diagonale $AD = AB + AE = a + (-b)$; mithin ist u. s. f.

10. $a + (-b)$ wird ausgedrückt durch $a - b$.

11. „Grössen, die aus dem Ursprunge nach einer gewissen willkürlich *angenommenen* Richtung gezogen sind, werden *positive* Grössen genannt; und die nach *entgegengesetzter* Richtung gezogenen heissen *negative* Grössen.

12. Man sagt: die Grösse AB (Fig. 40) hat zur AC *dasselbe Verhältniss*, wie die AD zur AE, wenn nicht bloss in Absicht auf Länge $AB : AC = AD : AE$, sondern auch noch der Winkel $DAE = BAC$ ist, wofern beide Winkel in einerlei Richtung gemessen werden.

13. Jeder Winkel A kann beliebig oft um 360° vergrössert oder verkleinert werden, folglich lässt er sich durch $A \pm 360^0$, $A \pm 2.360^0$, u. s. f. *ersetzen*.

14—16. Sätze über Proportionen.

17. „Die *Einheit* ist eine willkürlich angenommene Grösse, mit welcher andere Grössen verglichen dem Werthe nach bestimmt werden."

18. Wenn 3 Grössen a, b, c so beschaffen sind, dass sich verhält $1 : a = b : c$, so heisst die dritte c das *Product*, welches aus der *Multiplication* der b mit der a entsteht.

19—28. Sätze über Multiplication.

29. Sind 3 Grössen c, a, b so beschaffen, dass sich verhält $c : 1 = a : b$, so heisst die erste c der *Quotient*, welcher aus der *Division* der a durch die b entsteht.

30—41. Sätze über Division und Multiplication.

42. „Eine Grösse $a \times a \times a$, etc. von n Factoren wird die n^{te} *Potenz* von a genannt und ausgedrückt durch a^n.

43—50. Sätze über Potenzen.

51. „Ist $ab = c$ und a gegen die Einheit geneigt unter einem Winkel A, so wie b unter einem Winkel B; so wird c gegen die Einheit geneigt sein unter dem Winkel $A + B$. Bew. nach 18, 12 und 5.

52. „Wenn $b = a^m$ und a gegen die Einheit unter dem Winkel A geneigt ist, so wird b gegen die Einheit unter dem Winkel mA geneigt sein." Bew. nach 42 und 51.

53. Analoger Satz für Quotienten.

II *Kap.* Wurzeln der Grössen, gebrochene und negative Exponenten.

54. „Eine Grösse, welche zur m^{ten} Potenz erhoben die Grösse a gibt, wird die n^{te} *Wurzel* von a genannt und durch $\sqrt[n]{a}$ ausgedrückt."

55. „Die m^{te} Potenz der n^{ten} Wurzel aus a oder $(\sqrt[n]{a})^m$ wird durch $a^{\frac{m}{n}}$ ausgedrückt."

56. $\frac{1}{a^m}$ wird ausgedrückt durch a^{-m} für jederlei m.

57—60. Sätze über Wurzeln und Potenzen nach gebrochenen Exponenten.

61. „Wenn $b = \sqrt[n]{a}$, so hat b n verschiedene Werthe. Denn sei a gegen die Einheit geneigt unter einem Winkel A, dann ist a ebenfalls gegen die Einheit geneigt unter dem Winkel $A \pm p \cdot 360^0$, wo p eine ganze, übrigens positive oder negative Zahl ist. Damit nun b eine n^{te} Wurzel von a sein könne, muss sie gegen die Einheit unter einem solchen Winkel geneigt sein, das $nB = A + p \cdot 360^0$ also $B = \frac{A + p \cdot 360^0}{n}$ sei. Für p setze man nach und nach 0, 1, 2, ... und desgleichen —1, —2, ..., dann werden die entsprechenden Werthe von B sein: $\frac{A}{n}$, $\frac{A + 360^0}{n}$, $\frac{A + 2 \cdot 360^0}{n}$, ... Zwei solche Winkel B aber, bei denen die Werthe von p um n von einander verschieden sind, unterscheiden sich um 360^0, mithin gelten sie einander gleich; darum hat B und somit auch b nur n verschiedene Werthe."

62. „Ist a gegen die Einheit geneigt unter einem Winkel A, welcher *positiv* und kleiner als 360^0 ist; so *soll allgemein* $\frac{a}{p}$ *ausdrücken*: die a betrachtet als gegen die Einheit geneigt unter dem Winkel $A + p \cdot 360^0$, wo $p = 0$ oder eine ganze, positive oder negative Zahl ist."

63. Wenn $\left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{m}{n}} = b$ ist, so ist b gegen die Einheit geneigt unter dem Winkel $\frac{m}{n}(A + p \cdot 360^0)$. Folgt aus 55, 61, 62.

64—104. Sätze über Potenzen nach gebrochenen Exponenten.

105. Die Werthe von $\sqrt[2]{-1}$ sind gegen die Einheit geneigt unter den Winkeln 90^0 und 270^0. Denn sie sind (gemäss 61) $= \left(\frac{-1}{0}\right)^{\frac{1}{2}}$ und $\left(\frac{-1}{1}\right)^{\frac{1}{2}}$; aber -1 hat den Neigungswinkel 180^0, also sind die gesuchten Winkel $= \frac{1}{2} \cdot 180^0 = 90^0$ und $\frac{1}{2}(180^0 + 360^0) = 270^0$.

106. Wenn $\left(\frac{-1}{0}\right)^{\frac{1}{2}}$ dargestellt wird durch $+\sqrt{-1}$, so muss $\left(\frac{-1}{1}\right)^{\frac{1}{2}}$ durch $-\sqrt{-1}$ dargestellt werden.

107. Die Werthe von $1^{\frac{1}{4}}$ sind $1, +\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}$.

108. $\left(\frac{1}{1}\right)^{-\frac{1}{4}} = -\sqrt{-1}$.

109. Jede Grösse kann in der Form $\pm a \pm b \sqrt{-1}$ vorgestellt werden, wo a und b positive Grössen sind. Beweis geometrisch.

110—124. Verwandte Sätze.

III. *Kap.* Binomialtheorem, Auflösung von a^x in eine Reihe nach den Potenzen von x, Differentiation von a^x.

125. 126. Binomialtheorem.

127—135. Reihe für a^x.

136—138. Differenzirung von $\left(\frac{a}{q}\right)^x$.

IV. *Kap.* Beispiele zur Erläuterung der aufgestellten Principien.

139, 140. Es ist $\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{\Theta}{2\pi}} = cos.\ \Theta + sin.\ \Theta.\ \sqrt{-1}$.

Wird geometrisch erwiesen durch die Betrachtung eines Kreises vom Halbmesser $1 = AB$ in Fig 40.

Denn ist der Bogen $BF = \Theta$, der Umkreis $= 2\pi$, so ist $AF = \left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{\Theta}{2\pi}}$. Führt man auf AB senkrecht die AL, und auf beide senkrecht die FG und FH; so ist $AG = cos.\ \Theta$ und $AH = sin.\ \Theta \cdot \sqrt{-1}$, und im Parallelogramm $AGFH$ die Diagonale $AF = AG + AH$, also $\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{\Theta}{2\pi}} = cos.\ \Theta + sin.\ \Theta \cdot \sqrt{-1}$.

141—145. Untersuchungen des Dreiecks. Sind a, b, c die Seiten, A, B, C ihre Gegenwinkel, so ist

141. $c = b\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{A}{2\pi}} + a\left(\frac{1}{1}\right)^{-\frac{B}{2\pi}}$.

142. $A + B + C = \pi$

143. $b : c = sin.\ B : sin.\ C$

144. $cos.\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

146—151. Untersuchung der krummen Linien mittels Polar- und winkelrechter Coordinaten.

152. Aufstellung der Reihen von $sin.\ x$ und $cos.\ x$.

153—166. Dynamische Forschungen, vornehmlich über Centralbewegung.

167. Auflösung der cubischen Gleichungen.

168—172. Aufsuchung mehrerer Integrale.

173—176. Fortsetzung der Forschungen über Centralbewegung.

B. In dem *ersten* der beiden nachgetragenen *Aufsätze* macht *Warren* zuerst auf sein Werk aufmerksam, stellt die *Grundlage* desselben zur Übersicht, und *widerlegt* mehrere der ihm seit dessen Erscheinen gemachten *Einwürfe;* bespricht dann *Buée's* Abhandlung

mit den oben (§. 133) auszugsweise, mitgetheilten Worten, und endlich auch *Mourey's* Werk, das er seit December 1828 besitze, und das mit seinen eigenen Ansichten im Wesentlichen übereinstimme.

C. Der *zweite* dieser Aufsätze ist der geometrischen Darstellung der Potenzen von der allgemeinsten Form $(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ gewidmet, und bildet eine Fortsetzung seines Werkes. Das *Wichtigste* darin sind die Artikel 42 und 50.

In 42 beweist er, dass, wenn E_0 die positive Grundzahl der natürlichen Logarithmen vorstellt, die Grösse

$$\varrho = E_0^{x.E_0^{m\sqrt{-1}}} = E_0^{x\cos.m + x\sin.m.\sqrt{-1}} = E_0^{x\cos.m}\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{x\sin.m}{2\pi}},$$

wofern x positiv und veränderlich, m reell und beständig ist, den veränderlichen Radiusvector einer *logarithmischen Spirale* vorstellt, die ihn unter dem beständigen Winkel m schneidet.

In 50 dagegen zeigt er, wie man die allgemeinste Grösse $\varrho = \left(\frac{a}{p}\right)^{nE_0^{m\sqrt{-1}}}$, wo a was immer für eine Grösse, m eine mögliche und n eine positive Grösse ist, als Radiusvector einer logarithmischen Spirale darstellen könne, welche ihren Pol im Ursprunge von a liegen hat, die positive Richtung in dem Abstande 1 und unter dem Winkel m eine andere solche Spirale schneidet, die denselben Pol hat und auch die positive Einheit in ihrem Endpunkte schneidet, aber erst bei dem $p + 1^{ten}$ Umlaufe durch den Endpunkt von a geht.

Warren's Schriften hatten — wenigstens auf dem Continente — gleiches unverdientes Los wie jene *Mourey's*, nicht gekannt, beachtet und verbreitet zu werden.

§. 136.

V. Karl Friedrich Gauss. 1831.

Endlich verfiel auch einer der vornehmsten mathematischen Koryphäen Deutschlands, Hofrath und Prof. Karl Friedr. *Gauss* zu Göttingen, bei seinen Erforschungen der biquadratischen Zahlenreste, auf eine Verbildlichung der imaginären oder vielmehr allgemeiner der complexen Grössen. Die erste öffentliche Mittheilung von dieser Entdeckung machte einer seiner Verehrer in den „Göttingischen gelehrten Anzeigen, Jahr 1831, Stück 64, S. 625*)", und bald danach er selbst in seiner Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio 2da, Gottingae. 1832, Dietrich, pag. 16, art. 38 et 39. Seine *Grundansichten* lauten, wortgetreu übersetzt, wie folgt:

Art. 38. „So wie jede reelle Grösse durch ein Stück einer beiderseits unbegrenzten *Geraden*, welches von einem willkürlichen Anfangspunkte aus auf ihr zu nehmen und nach

*) abgedruckt in *Grunert's* Archiv, 6. Bd., 3. Heft, 1845. S. 236 — 238.

einem anderen beliebigen, zur Messeinheit angenommenen, Abschnitte dieser Geraden zu schätzen ist, ausgedrückt und durch den anderen (Grenz-) *Punkt* vorgestellt werden kann, so dass *die Punkte* auf der einen Seite des Anfangspunktes die *positiven*, jene auf der anderen Seite die *negativen Grössen vorstellen*; eben so wird auch jedwede *complexe* Grösse vorgestellt werden können durch irgend einen Punkt einer unbegrenzten *Ebene*, in welcher eine bestimmte *Gerade* auf die *reellen* Grössen bezogen wird; nämlich die *complexe* Grösse $x + iy$ (wo i für $\sqrt{-1}$ steht) durch denjenigen *Punkt*, dessen *Abscisse* $= x$ und die *Ordinate* (welche auf einer Seite der Abscissenlinie positiv, auf der andern aber negativ genommen wird) $= y$ ist. Nach diesem Übereinkommen kann man sagen, jede complexe Grösse messe die Verschiedenheit (inaequalitatem) zwischen der Lage des Punktes, auf den sie bezogen wird, und der Lage des Anfangspunktes. Hierbei deutet die *positive Einheit* ein beliebiges, aber bestimmtes Abrücken (deflexum) nach einer *beliebigen*, aber bestimmten Richtung hin, die *negative* Einheit ein eben so grosses Abrücken nach der *entgegengesetzten* Richtung, endlich die *imaginären* Einheiten eben so grosse Abrückungen nach zwei *seitlichen* (laterales) senkrechten Richtungen an."

„Auf diese Weise wird die Lehre von dem Wesen der so genannten imaginären Grössen bedeutend aufgehellt. Wird der Anfangspunkt durch 0 (Null) angedeutet, und werden zwei complexe Grössen m, m' auf die Punkte M, M' bezogen, deren Lage in Bezug auf (den Punkt) 0 sie ausdrücken, so wird der *Unterschied* $m - m'$ nichts Anderes sein, als die Lage des Punktes M rücksichtlich des Punktes M'. Dagegen, wenn das *Product* mm' die Lage eines Punktes N in Bezug auf 0 vorstellen soll: so wird man leicht einsehen, dass diese Lage eben so durch jene des Punktes M gegen 0 bestimmt wird, wie die Lage des Punktes M' durch jene des der positiven Einheit entsprechenden Punktes. Sonach wird man nicht unpassend sagen: die *Lagen* der Punkte, welche den complexen Grössen mm', m, m', 1 entsprechen, machen eine *Proportion* (?)".

„Die ausführlichere Behandlung dieses Gegenstandes behalten wir uns jedoch auf eine andere Gelegenheit vor. *)"

„Die *Schwierigkeiten*, in welche die Lehre von den imaginären Grössen vermeintlich gehüllt ist, rühren grossen Theils von minder passlichen *Benennungen* her, weil Manche des ungeeigneten (absono) Namens „unmögliche Grössen" sich bedient haben. Hätte man, ausgehend von den Begriffen, welche die Verschiedenheiten zweier Abmesungen darbieten (wie sie in grösster Reinheit bei den Betrachtungen des Raumes wahrgenommen werden) die positiven Grössen *direct*, die negativen *invers*, und die imaginären *laterale* genannt; so würde anstatt Verwicklung Einfachheit, anstatt Dunkelheit Klarheit sich ergeben haben" **).

*) Ist bisher noch nicht verwirklicht worden.

**) Sollten nicht *richtigere Begriffe* mehr als angemessenere Benennungen noth thun? Sobald jene einmal da sind, finden sich ja diese leicht zu ihnen. So waren die beiden ersteren Benennungen bereits von Emanuel de *Veley* in seiner Introduction à l'Algèbre, 8, Paris, 1799, vorgeschlagen und von *Carnot* in seiner Corrélation des figures, Paris, 1801, angewandt worden; und gleichwohl wurde durch sie die Lehre von den entgegengesetzten Grössen nicht aufgehellt.

§. 137.

VI. *Anhänger und Nachahmer der Gauss'ischen Lehre.* 1831—1847.

Auch die Gauss'ische Lehre von der räumlichen Darstellung der imaginären Grössen vermochte nicht die Billigung der mathematischen Zeitgenossen zu erringen, und fand nur erst sehr langsam an einzelnen Freunden einige Pflege und Weiterausbildung, von deren öffentlichen Leistungen mir bloss folgende bekannt geworden sind.

1. *W. M. Drobisch*, Prof. d. Math. zu Leipzig, 1834. — In seiner (schon in §. 4 erwähnten) Lehre von den höheren Gleichungen machte er die Mathematiker auf diese neue Lehre aufmerksam, zeichnete ihre Grundzüge und empfahl sie zu weiterer Ausbildung.

2. Ritter *G. W. Müller*, Major zu Hannover, 1841. — In *Grunert's* Archiv, I. Thl., 4. Hft., 1841, S. 397—400 benützte er seine, in Crelle's Journal f. Math. Bd. 15, 3. Hft., aufgestellte *Lehre vom Zuge*, um die von *Gauss* in Anwendung gebrachte geometrische Bedeutung der complexen Grössen nachzuweisen, und um mittels derselben das *Product* zweier complexen Grössen in einer Weise zu verbildlichen, die im Wesentlichen mit jener von *Mourey* (§. 134) übereinkommt.

3. *C. A. Bretschneider*, Professor zu Gotha, 1844. — In seinem „Lehrgebäude der nied. Geom., 8., Jena, 1844, Frommann," S. 299—308, §. 526—535, führt er die von dem Berichterstatter über die Gauss'ische Entdeckung, in den Göttinger Gel. Anzeigen, (§. 136) angewandte Betrachtung der Relationen, welche nicht nur in Einer Reihe von Gegenständen, sondern auch in einer Reihe (oder Schicht) von Reihen, die sich neben einander befinden, bei den Übergängen von was immer für Gliedern auf andere Statt finden, weiter aus, und wendet sie auch auf eine Masse (oder ein System) von über einander liegenden Schichten von Reihen an. Dabei findet er (in s. §. 529), dass die in einer Reihenschicht durch $\sqrt{-1} = i$ anzudeutende Relation, bei dem Übergange von einem Gliede einer *Hauptreihe* auf ein gleichvieltes einer zu ihr parallel laufenden *Nebenreihe*, mit der durch k anzudeutenden Relation, bei dem Übergange von einem Gliede einer Schicht auf ein gleichlägiges (übereinstimmiges) einer parallelen Schicht, übereinkomme; was mit dem, von uns, in den §§. 120 und 121, Gefundenen im Widerspruche ist, und zugleich (in s. §. 533) ihn hindert, die imaginären Grössen durch Flächen im Raume zu construiren. Auch deutet er der Erste die imaginären Winkel, freilich nur ganz obenhin, und darum (nach §. 124) auch nicht fehlerlos, an. Endlich verfällt er (in s. §. 533, Anmerk.) auch in den schon (§. 133) an *Buée* gerügten Fehler, von $\sqrt{-1} = i$ zu behaupten, sie signalisire nicht allein die senkrechten, sondern auch die schiefen Ordinaten.

4. Doctor *Theodor Wittstein* zu Hannover, 1845, 46. — In Grunert's Archiv VI. Thl. 3. Hft. 1845, S. 226—235 stellt er die Grundzüge der Gauss'ischen Construction imaginärer Grössen kurz auf und wendet sie auf die 6 *algebraischen* Grundrechnungen (mit Ausschluss des — *transcendenten* — Logarithmirens) an, und stützt endlich auf diese seinen

Beweis des Fundamentalsatzes der höheren algebraischen Gleichungen (§. 148. I.). Im VII. Thl. 4. Hft., 1846, S. 402—410 gibt er „Ein paar einfache Anwendungen der geom. Darstellung imaginärer Zahlen, insbesondere auf *cubische Gleichungen*," und S. 411—430 bringt er viel Interessantes „Über die geometr. Darstellung complexer *Functionen*." Endlich hat er sein „Lehrbuch der Arithmetik f. höh. Bildungsanstalten, Hannover, Hahn, 1846, I. und II. Abthlg., rest. III. Abthl." nach diesen Ansichten bearbeitet.

5. *L. Ballauf*, Lehrer der Math. zu Varel, 1844, 45. — In Grunert's Archiv, V. Thl. 3. Hft., 1844, S. 280—286, und im VI. Thl. 4. Hft., 1845, S. 409—414, stellt er, nach brieflichen Mittheilungen *Wittstein's* über die Gauss'ische Lehre und nach *Müller's* Aufsatze im Archiv, gemäss der Betrachtung, dass, wenn man in der bekannten Gleichung

$re^{\varphi\sqrt{-1}} = r\,(cos.\ \varphi + \sqrt{-1}\ sin.\ \varphi)$ nicht nur $\sqrt{-1} = i$, sondern auch $e^{\sqrt{-1}} = e^{i} = \varepsilon$ setzt, folglich sie in $r\varepsilon^{\varphi} = r\ cos.\ \varphi + i \cdot r\ sin.\ \varphi$ verwandelt, die Potenz ε^{φ} als ein *Behandlungszeichen* (?) auf, welches eine Drehung eines Strahles um den Winkel φ vorschreibt, so dass das Product $r\varepsilon^{\varphi}$ den Strahl r um den Winkel φ gedreht vorstellt.

6. *H. B. Lübsen*, 1845. — Sein „Ausführl. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, 2te Aufl. 1845, Oldenburg, Schulze, gr. 8." bringt in einem Anhange auch die Theorie des Imaginären mit Rücksicht auf die Ansichten von Gauss. Ich kenne diese Notiz bloss aus Grunert's Archiv VII. Thl. 2. Hft. Lit. Ber. S. 382.

7. *J. C. Ullherr*, polytechn. Prof. zu Nürnberg, 1846. — In Crelle's Journal für die Math. 31. Bd., 3. Hft., 1846, Nr. 16, S. 231—234 gab er einige Bemerkungen über imaginäre Ausdrücke und danach „Zwei Beweise für die Existenz der Wurzeln der höh. algebr. Gleichungen."

8. *Heinr. Scheffler* zu Helmstedt, 1846. — In seinem Werke: „Über das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie, insbes. über die geometr. Bedeutung der imagin. Zahlen, 8. 428 S. mit 80 Holzschnitten im Text, Braunschweig, 1846, Leibrock," bemüht er sich, die Gauss'ischen Ansichten über das Imaginäre dadurch zu rechtfertigen, dass er auch schon an den Zahlen der Arithmetik nicht allein *Grösse* und *Stetigkeit*, sondern auch noch eine **Richtung** nachweist, wie sie alle drei an Strecken sich vorfinden. Dem Wesentlichen nach kommt seine Rechtfertigung mit der von *Mourey* überein; doch muss man anerkennen, dass er selbe mit vielem logischen Scharfsinn plausibel dargestellt hat. Nur Schade, dass er (wie bereits in Grunert's Archiv VIII. Thl. 4. Hft., 1846, Lit. Ber. S. 471, 72 von dem dortigen Beurtheiler bemerkt wurde) allzuviel Bekanntes mit in seine — gewiss sehr lesens- und beachtenswerthe — Schrift aufgenommen und zum Theil dadurch diese zu sehr vertheuert hat.

Anmerkung. Von folgenden zwei Abhandlungen:

Moth Franz, Prof. d. Math. zu Linz, „Über die Anwendbarkeit der imaginären Zahlformen in der Geometrie" in den Abhandlungen der k. bair. Akademie d. Wissenschaften zu München für das Jahr 1840; und

Arenstein J., Prof. d. Math. zu Pest, „Was sind die imaginären Grössen, und welches ist ihr analytischer und geometrischer Sinn?" in den „Naturwissenschaftlichen Abhandlungen (der Gesellschaft der Freunde der Naturwissenschaften zu Wien) gesammelt v. *Wilh Haidinger*, Wien, 1847—48, Braumüller;"
vermochte ich mir bisher nichts mehr als die Titel zu verschaffen.

§. 138.

VII. *W. R. Hamilton.* 1844—47.

Endlich scheint in ähnlichem Sinne, wie die bisher genannten Schriftsteller, auch der Engländer *W. R. Hamilton* das Wesen des Imaginären aufzufassen, das er in einer Reihe von Aufsätzen erforscht, die ich jedoch nur den Titeln nach aus Grunert's Archiv VII. Bd., 4. Hft. 1846, S. 412, Note, und Lit. Ber. Nr. 29, S. 443; Nr. 31, S. 467; Nr. 33, S. 492; Nr. 34, S. 506; Nr. 35, S. 523 kenne, als:

1. „On *Quaternions*, or on a new *System of Imaginaries* in Algebra; im Philosophical Magazine für 1844 und 45;

2. On *Symbolical Geometry*; in The Cambridge and Dublin mathematical Journal, Edited by *W. Thomson*, Cambridge, und zwar:
im J. 1846, Vol. I., Nr. 1 und 2 (Jan.), Nr. 3 (März), Nr. 4 (Mai), Nr. 5 und 6 (Nov.);
im J. 1847, Vol. II., Nr. 7 (Jan.), Nr. 8 und 9 (März).

§. 139.

Überblick der Mittel und Grundlagen der bisher vorgeschlagenen Constructionen des Imaginären.

Wie man nunmehr aus unserer gedrängten Zusammenstellung ersieht, wurden bisher eigentlich nur *dreierlei Mittel* zur geometrischen Construction der imaginären zweitgradigen Wurzeln oder der complexen Grössen vorgeschlagen, namentlich:

1. die *Seiten von Quadraten*, durch *Kühn* und *Buée*,
2. die *winkelrechten Coordinatenzüge*, durch *Gauss*, endlich
3. die *Radiusvectorzüge* durch *Warren*, *Mourey*, *Ballauf* und *Scheffler*.

Als theils offen ausgesprochene, theils versteckt gehaltene *dreierlei Grundlagen* oder Quellen ihrer Constructionen gebrauchten

a) *Kühn* und *Buée* das Negativwerden eines Quadrates bei seinem Übergange aus einem Quadranten in den angrenzenden;

b) *Gauss* die bekannten zur Reduction eines complexen Ausdruckes auf die goniometrische Form dienenden Gleichungen

$$x + \sqrt{-1} \cdot y = r\,(\cos.\,\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin.\,\varphi),$$

$$x = r \cos.\,\varphi,\quad y = r \sin.\,\varphi,\quad r^2 = x^2 + y^2,\quad \tang.\,\varphi = \frac{y}{x};$$

von denen die 4 letzteren auch den Zusammenhang zwischen den rechtwinkligen und Polarcoordinaten ausdrücken; endlich

c) *Warren, Mourey, Ballauf, Scheffler* noch die fernere bekannte Exponentialform

$$\cos.\ \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin.\ \varphi = e^{\varphi \sqrt{-1}} = (e^{\sqrt{-1}})^{\varphi}$$

oder beziehungsweise

$$x + \sqrt{-1} \cdot y = r e^{\sqrt{-1} \cdot \varphi} = r(e^{\sqrt{-1}} = \varepsilon)^{\varphi}.$$

Sechstes Hauptstück.

Zeichnende Darstellung der Gleichungen des Zusammenhanges gleichzeitig veränderlicher, complexer oder in ablenkenden Beziehungen vorkommender Zahlen.

---

§. 140.

Bestimmung der abhängig veränderlichen Zahlen durch die frei veränderlichen.

Die Algebra trachtet bekanntlich überall, wo es angeht, den Zusammenhang oder die wechselseitige Abhängigkeit der Zahlwerthe von Grössen, die gegenseitig auf einander einwirken, folglich sich entweder allesammt oder wenigstens zum Theil mit einander oder gleichzeitig verändern, durch *Gleichungen* auszudrücken. Löst man nun zur genaueren Einsicht dieses Zuzammenhanges der Veränderlichen die sie verknüpfenden Gleichungen wo möglich dergestalt auf, dass duch eine oder etliche solche Veränderlichen — *Grundveränderlichen,* — alle übrigen — *abhängig Veränderlichen, Functionen* — ausgedrückt, als Rechnungsausdrücke von jenen dargestellt werden: so kann man für jede Gruppe zusammen bestehender besonderer Werthe der Grundveränderlichen auch die zugehörigen Functionen nach Gefallen entweder algebraisch berechnen oder geometrisch construiren. Dabei wird solches Construiren dort, wo alle Veränderlichen direct bezogen erscheinen, auf die in den geometrischen Lehrbüchern erörterten Weisen; und da wo einige oder alle Veränderlichen ablenkend bezogen vorkommen, nach den im vorigen Hauptstücke gelehrten Verfahren, vollzogen werden können.

Sollten dabei manche Rechnungsausdrücke, solche *entwickelte Functionen, mehrdeutig* oder vielförmig sein: so behandelt man am besten jede solche Functionsform als eine eigenthümliche Function. Gestatten endlich jene Zusammenhangs- oder Bestimmungsgleichungen der Veränderlichen keine *allgemeine algebraische Auflösung,* sondern nur eine versuchsweise für gegebene besondere Werthe der Grundveränderlichen: so können doch immerhin auch da noch die entfallenden Werthe der abhängigen Veränderlichen geometrisch construirt werden.

§. 141.

Zusammenstellung der Werthe gleichzeitiger Veränderlichen.

A. *Tabellarische.* Um den Gang, Zug oder Lauf der gleichzeitigen Veränderung mehrerer zusammengehöriger Veränderlichen übersichtlich darzulegen, pflegt man, wenn nur *einige wenige* Gruppen zusammengehöriger Werthe dieser Veränderlichen zur Ansicht vorzulegen sind, die Reihen der nach einander folgenden Werthe jeder einzelnen Veränderlichen in eben so vielen (wagrechten) *Zeilen*, durch *Beistriche* getrennt, dergestalt *unter einander* zu schreiben, dass jedesmal die einander entsprechenden oder zusammengehörigen Werthe gerade unter einander zu stehen kommen. Hieher gehörige *Beispiele* geben: die arithmetischen und geometrischen Progressionen mit den über sie geschriebenen Reihen der Stellenzahlen ihrer Glieder; die zusammengehörigen Werthe der Unbekannten in unbestimmten Aufgaben oder Gleichungen, u. dgl. m.

Sind aber *sehr viele* derlei Gruppen zusammengehöriger Werthe von gleichzeitigen Veränderlichen übersichtlich zusammenzustellen: so bringt man sie allesammt in eigene Verzeichnisse, *Tabellen* oder *Tafeln* genannt, die in herablaufenden Spalten und auf wagerechten Zeilen in den durch sie gebildeten Fächern die zugehörigen Werthe der abhängig Veränderlichen darbieten, und deren Einrichtung hier als genugsam bekannt vorausgesetzt werden darf.

Gemeiniglich bestimmen sie nur zu den Werthen *Einer Grundveränderlichen*, die man hier das *Argument der Tafel* zu nennen pflegt, die zugehörigen Werthe *einer einzigen Function* (abhängig Veränderlichen); wie z. B. die Tafeln gewisser, etwa der zweiten oder dritten, Potenzen und Wurzeln, oder die Tafeln der dekadischen Logarithmen der natürlich gereihten ganzen Zahlen. Oder sie liefern zu den Werthen jener *Grundveränderlichen* die gleichzeitigen Werthe *mehrerer Functionen*; wie z. B. die goniometrischen Tafeln zu den Winkeln die gewöhnlichen 4 oder alle 8 goniometrischen Functionen, ja manche sogar auch noch deren dekadische Logarithmen angeben.

Sehr oft geben aber solche Tabellen zu den mancherlei Paaren von Werthen *zweier Grundveränderlichen* (Argumente) die angehörigen Werthe einer einzigen Function; wie z.B. die Tafeln der Producte zweier ganzzahligen Factoren, die Tafeln mehrerer nach einander folgenden Potenzen (der 2ten, 3ten, 4ten, u. s. f.), wenigstens einiger ersten ganzen Zahlen (etwa bis 100).

Jene *ersteren* Tafeln bringen gleichsam je eine Gleichung *zweier*, und diese *letzteren* je eine Gleichung *dreier* gleichzeitiger Veränderlichen, tabellarisch, in Tabellenform, zur Übersicht.

Aber auch Gleichungen, oder die Verknüpfungsweisen, von *vier* gleichzeitigen Veränderlichen lassen sich tabellarisch darstellen, indem man, je nachdem die Tabellen weniger oder mehr ausgedehnt sind, für jeden Werth der einen Veränderlichen nur eine Seite, ein Blatt (Tableau) oder ein ganzes Buch für die mannigfaltige Veränderung der drei übrigen,

Veränderlichen widmet. Hieher gehören z. B. die jährlichen *Mondephemeriden* der Astronomen, in denen jene eine ausgeschiedene Veränderliche die fortlaufende *Jahrzahl* ist, und welche, je ein besonderes Buch, einen Kalender, bildend, zu den nach einander folgenden *Jahrestagen* und an jedem Tage wieder zu mehreren *Tagesstunden* die beiden durch diese dreierlei Grundveränderlichen bestimmten Veränderlichen (Functionen), die *Länge* und *Breite*, oder die *gerade Aufsteigung* und *Abweichung* des Mondes liefern.

Ja selbst die Gleichungen von *noch mehr*, von 5, 6, 7, ... Veränderlichen liessen sich, wenigstens in der Idee (!), tabellarisch vorstellen, wenn man mehrere jener erwähnten Bücher unter der Überschrift der *vierten* Grundveränderlichen, wie z. B. die Mondephemeriden jedes *Jahrzehends*, in einen grösseren *Band* zusammenbinden würde; wenn man ferner diese Bände unter der Aufschrift der *fünften* Grundveränderlichen, wie die Mondephemeriden jedes *Jahrhundertes*, in ein *Fach* neben einander stellen; danach diese Fächer unter der Aufschrift der *sechsten* Grundveränderlichen, wie die Ephemeriden jedes *Jahrtausendes* in einen *Bücherschrank* unter einander bringen, und auf diesem deutlich vorgezeichneten Wege weiter vorgehen möchte.

Solche *tabellarische* und *arithmetische* Darstellung der gleichzeitigen Veränderung mehrerer zusammenhängender Grössen erleidet demnach *nicht so bald* durch die *Menge* dieser Veränderlichen eine *Beschränkung*.

B. Graphische, zeichnende. Bei höchst geringer Anzahl der Veränderlichen ist hingegen die graphische (zeichnende) oder geometrische (räumliche) Darstellung des stetigen Ganges ihrer gleichzeitigen Veränderung beschränkt, weil der Raum *nicht mehr als drei* Abmessungen besitzt. Denn hier können die veränderlichen Grössen, damit der *stetige Gang ihrer Veränderung* an einem Bilde veranschaulicht werde, weder durch Körperräume, noch durch Flächenräume sondern nur durch *Strecken* oder *Winkel* vorgestellt werden, und diese veränderlichen Constructionselemente müssen nothwendig dermassen an einander hangen, dass *keine zwei Strecken in einerlei Gerade*, und *keine zwei Winkel in einerlei Ebene fallen*, weil sie sonst in Ein solches Element sich summiren würden; wesswegen höchstens drei solche veränderliche Constructionselemente an einander gehängt werden können, und nur die stetige Veränderung *zweier* oder *dreier* gleichzeitiger Veränderlichen sich bildlich darstellen lässt. Derlei Abbildungen können daher, bei stetiger Veränderung aller Veränderlichen, nur entweder ununterbrochene *Linien* oder *Flächen* sein; während sie bei unstetiger Veränderung derselben nur *Systeme getrennter Punkte*, insbesondere zur Verdeutlichung ihrer Aufeinanderfolge die Spitzen gebrochener Linien oder eckiger Flächen sind.

§. 142.

Geometrisches Bildniss der Änderung einer einzelnen ablenkend beziehlichen Veränderlichen.

Ist x irgend eine einzelne ablenkend beziehliche veränderliche Grösse, und zwar:

$$x = e^{\downarrow\varphi} r = x' + \downarrow x'';$$

so hängt selbe offenbar von zwei direct beziehlichen (reellen) Grössen, von φ und r, oder von x' und x'' ab, und es wird, vermöge §. 93, jeder einzelne Werth derselben entweder durch einen geraden um den Winkel φ abweichenden Radiusvectorzug r, oder durch einen winkelrecht gebrochenen, aus der Abscisse x' und der Ordinate x'' zusammengesetzten Coordinatenzug dargestellt. Mithin bestimmt oder fixirt

erstens: jeder *einzelne Werth* dieser ablenkend bezogenen Veränderlichen x einen *Punkt* — den Endpunkt des sie abbildenden Zuges — in der Constructions- oder Coordinaten-Ebene; oder jener bestimmte Werth, jenes Stadium der Veränderlichen x, besitzt an diesem Punkte seinen räumlichen Stellvertreter, geometrischen *Repräsentanten*, sein geometrisches Bildniss. Eigentlich macht dieser Punkt das *Innehalten*, Stehenbleiben der Veränderlichen x bei diesem betreffenden Werthe derselben anschaulich; er ist das Bild eines besonderen Stadiums (Standes) der Veränderlichen.

Zweitens: Wenn aber nur Eines der beiden, der Veränderlichen x zukommenden, Bestimmungselemente, φ und r, oder x' und x'', willkürlich wählbar, oder frei abänderlich bleibt, das andere dagegen entweder schon in voraus unabänderlich festgestellt ist, oder aber dermassen nach jenem sich richtet, dass beide einer gewissen *Zusammenhangsgleichung* zwischen ihnen genügen: so wird jener, den Sonderwerth von x abbildende Punkt (φ, r) oder (x', x''), bei stetiger Veränderung jenes ersteren Elementes, also auch dieser Veränderlichen x selbst, in der Constructionsebene *eine Linie* beschreiben; was auch schon anderweitig bekannt ist, und keiner ferneren Erörterung bedarf. Die stetige Änderung der Veränderlichen x, oder wie man uneigentlich zu sagen gewohnt ist, diese Veränderliche selbst, wird demnach, so oft zwischen ihren beiden Bestimmungselementen ein Zusammenhang, eine wechselseitige Abhängigkeit besteht, *durch eine ebene Linie abgebildet.*

Drittens endlich, wenn beide Bestimmungselemente der Veränderlichen x von einander *unabhängig*, völlig frei abänderlich sind: so wird jener den besonderen Werth von x abbildende Punkt nach und nach allerorts in der Ebene der Construction sich befinden können oder die ganze *Ebene* durchlaufen oder beschreiben. Die stetige Veränderliche x oder eigentlich die stetige Änderung derselben, wird demnach, wenn ihre Bestimmungselemente völlig frei oder von einander unabhängig sich ändern können, *durch eine ganze Ebene abgebildet.*

§. 143.

Geometrische Darstellung oder Abbildung der Functionen einer Veränderlichen.

Hängen zwei gleichzeitige Veränderliche, x und y, nach Angabe einer Bedingungs- oder Zusammenhangsgleichung mit einander zusammen oder von einander ab; richtet sich nach der einen freien, willkürlichen oder Grundveränderlichen x die andere von ihr abhängige Veränderliche oder so genannte *Function* y nach Vorschrift eines gewissen, jene x enthaltenden, Rechnungsausdruckes $f(x)$, so dass $y = f(x)$ die Abhängigkeitsgleichung beider Veränderlichen ist; so kann man, zur Erkenntniss der Eigenheiten jener Function

oder dieser Gleichung die gleichzeitige (bald stetige bald unstetige) Änderung dieser Veränderlichen auf mancherlei *Weisen* bildlich vor Augen legen, von denen folgende *vier* die gewöhnlichen sind.

Erste Darstellungsweise. Man stellt einen gewissen allgemeinen ablenkend bezüglichen Werth der Grundveränderlichen x entweder durch einen Radiusvectorzug oder durch einen Coordinatenzug dar, und construirt nach Anweisung jener Abhängigkeitsgleichung oder der Function $f(x)$ die andere abhängige Veränderliche y gleichfalls als einen solchen Zug. Danach lässt man die Grundveränderliche x und mit ihr den sie vorstellenden Zug *unstetig* (sprungweise) um Endliches sich verändern, entweder beliebig, um die davon abhängige Veränderung der Function y und des sie darstellenden Zuges zu erforschen, oder dermassen, dass die Function y und der sie vorstellende Zug auf eine in voraus bezeichnete Weise sich abändern.

Zweite Darstellungsweise. Man stellt gleichfalls jede der beiden verbundenen Veränderlichen x und y durch einen Zug, oder ihren jeweiligen Stand durch einen Punkt dar; lässt aber die Grundveränderliche x dergestalt sich verändern, dass zwischen ihren Bestimmungselementen selbst wieder ein Zusammenhang besteht, folglich der ihr entsprechende Punkt eine stetige Linie beschreibt. Dann muss auch der die Function y repräsentirende Punkt eine stetige Linie in derselben Constructionsebene beschreiben. Die Beschaffenheit und der Zusammenhang dieser beiderlei Linien gibt sofort über den stetigen Gang der Änderungen dieser zusammengehörenden Veränderlichen Aufschluss.

Dritte Darstellungsweise. Man kann beide zusammenhängende Veränderlichen x und y complex gestalten, nämlich $x = x' + \downarrow x''$, $\quad y = y' + \downarrow y''$;
wonach ihre Verbindungsgleichung $y = f(x)$ die Form

$$y' + \downarrow y'' = f(x' + \downarrow x'') \text{ oder gemäss §. 52}$$
$$= F(x', x'') + \downarrow \mathfrak{F}(x', x'')$$

annimmt, und sofort (zufolge §. 51, 5) in die beiden simultanen Gleichungen

$$y' = F(x', x''), \quad y'' = \mathfrak{F}(x', x'') \text{ zerfällt.}$$

Danach stellt man die Veränderliche x als einen Coordinatenzug $= x' + \downarrow x''$ und ihre stetige Veränderung durch die ganze Constructionsebene dar, und errichtet sofort in dem Endpunkte jedes solchen Coordinatenzuges auf die Constructionsebene die Senkrechten von der Länge y' und y''. Die Continua der Endpunkte dieser zweierlei Senkrechten machen sonach *zwei Flächen* aus, deren Gleichungen zwischen den rechtwinkligen Coordinaten

$$y' = F(x', x'') \quad \text{und} \quad y'' = \mathfrak{F}(x', x'')$$

sind, und deren Beschaffenheiten über die Änderungen von y' und y'', daher auch über jene von $y = y' + \downarrow y''$, Aufschluss geben.

Vierte Darstellungsweise. Stellt man die Grundveränderliche x in der ursprünglichen Constructionsebene $\mathfrak{A}$ (Fig. 41) als einen Radiusvectorzug $\overline{OM}$, nämlich $x = e^{\downarrow\varphi}r$, oder als einen Coordinatenzug $\overline{OPM}$, namentlich $x = OP + \downarrow PM = x' + \downarrow x''$ dar: so lässt sich senkrecht auf diesen Radiusvector OM in seinem Endpunkte M eine völlig bestimmte

Ebene 𝔅 aufrichten, in welcher eine der beiden Richtungen ihrer Durchschnittslinie mit der ursprünglichen Ebene 𝔄 als Grundrichtung dienen kann, um die ablenkend beziehliche Function y, nachdem man sie vorher nach Anleitung der §§. 106—118 in der Ebene 𝔄 construirt hat, in die neue Ebene 𝔅 als einen Zug zu übertragen, der im Punkte M an die Grundveränderliche x angeknüpft wird. Bezeichnet man nämlich in der Ebene 𝔅 die transverse Beziehung, also das Senkrechtsein auf der Ebene 𝔄 durch den stehenden Pfeil, und macht man $MQ = y'$, $QN = y''$, $BMN = \psi$, $MN = s$; so ist die Function

$$y = \overline{MN} = e^{\uparrow\psi}s = \overline{MQN} = y' + \uparrow y'' = s\ cos.\ \psi + \uparrow s\ sin.\ \psi.$$

Es lässt sich demnach zu jedem, einen Stand der Grundveränderlichen x repräsentirenden Punkte M ein den entsprechenden Stand der Function y repräsentirender Punkt N bestimmen. Das Continuum der Punkte N ist danach entweder im Allgemeinen eine Fläche oder insbesondere eine Linie, je nachdem jenes der Punkte M allgemein die ganze Ebene 𝔄 oder insbesondere in ihr eine ebene Linie ausmacht.

Sollen aber *umgekehrt* zu einem Punkte N (in Fig. 42) der den Lauf der Veränderung der Function y vorstellig machenden Fläche oder Linie wieder der Punkt M und dadurch die beiden ablenkend beziehlichen Coordinaten x und y zurück bestimmt werden; so wird man zuvörderst den Punkt N in die Ebene 𝔄 nach Q projiciren, da dann die Projicirende $QN = \uparrow y''$ sein muss. Weil ferner MQ auf OM senkrecht sein soll, so muss der Punkt M auf der über OQ als Durchmesser zu beschreibenden Kreislinie OMQ sich befinden. Damit aber nur ein einziger solcher Punkt M sich ergebe, darf die Grundveränderliche x nur durch eine *Linie* OU vorgestellt werden, welche diese Kreislinie in nicht mehr als Einem Punkte durchschneidet, wie z. B. gerade Linien und Kegelschnittslinien, welche durch den Punkt O hindurchgehen. Ist sonach der Punkt M bestimmt, so ist $MQ = y'$, $OM = r$, $XOM = \varphi$, und wenn man M auf OX nach P projicirt, $OP = x'$ und $PM = x''$.

Am einfachsten dürfte man den Gang der Änderung der Grundveränderlichen x durch eine bestimmte Gerade OC vorstellen, welche durch den Fixpunkt O hindurchgeht, und einen bestimmten Winkel α mit der Grundrichtung OX macht, so dass $\varphi = \alpha$ die Polargleichung dieser Geraden und $x = e^{\downarrow\alpha}r = r\ cos.\ \alpha + \downarrow r\ sin.\ \alpha$ ist. Insbesondere kann man in diese Gerade selbst die Grundrichtung legen, da dann der Winkel $\alpha = 0$ und $x = r$ wird, und man sonach eigentlich 3 zu einander winkelrechte Axen der x, y' und y' zur Construction der Linie y benützt.

Auf solche Weise ist man demnach im Stande, die stetige Änderung zweier gleichzeitigen Veränderlichen x und y geometrisch zu verbildlichen, von denen die eine x bloss direct beziehlich, die andere y aber allgemein ablenkend beziehlich ist. Der Lauf beider Veränderlichen wird durch Linien, und zwar jener der Grundveränderlichen x durch die Polaraxe, und jener der Function y überhaupt durch eine *Linie* im Raume dargestellt. Mithin kann eine Gleichung von der Form

$$y' + \uparrow y'' = f(x' + \downarrow 0)\ \text{oder}\ \mathfrak{F}(x' + \downarrow 0,\ y' + \uparrow y'') = 0$$

oder mit verwechselten Coordinaten

$$y' + \downarrow 0 = f(x' + \uparrow x''), \quad f(x' + \uparrow x'', y' + \downarrow 0) = 0$$

auch schon allein, ohne Beitritt einer zweiten Gleichung, eine Linie im Raume darstellen.

§. 144.

Anwendung dieser Lehre auf die Nachweisung des Vorhandenseins von Wurzelwerthen der höheren algebraischen Gleichungen.

Die so eben erörterte Lehre von der Abbildung des stetigen Laufes der Veränderung zweier zusammenhängenden Veränderlichen findet eine hochwichtige Anwendung bei dem geometrischen Erweise folgenden *Fundamentalsatzes der Lehre von den höheren algebraischen Gleichungen.*

Jede algebraische Gleichung mit Einer Unbekannten hat überhaupt wenigstens Einen complexen — ablenkend beziehlichen — Wurzelwerth.

Ist nämlich $y = f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0$ die gegebene Gleichung, mögen ihre Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$, reell oder complex — direct oder ablenkend beziehlich — sein: so muss es gewiss einen complexen — ablenkend beziehlichen — Werth für x geben, welcher der Bedingung $f(x) = 0$ Genüge leistet.

Man hat zu diesem Beweise die drei ersten so eben beschriebenen geometrischen Darstellungsweisen des Zusammenhanges zweier stetigen Veränderlichen verwendet. Von diesen Darstellungen sollen aber hier bloss die beiden ersteren als die einfacheren umständlich aus einander gesetzt, die dritte zusammengesetztere hingegen nur kurz angedeutet werden.

I. *Benützung der ersten Darstellungsweise der Functionen.*

Sie geschah zuerst von Dr. *Wittstein* in seinem bemerkenswerthen Aufsatze in Grunert's Archiv, 1845, 6. Bd., 3. Hft., Nr. 35, Art. 5 und 6, Seite 231—234, um dem von *Cauchy* gegebenen analytischen Beweise des fraglichen Fundamentalsatzes eine geometrische Grundlage zu ertheilen. Nach unseren Ansichten, und mit einigen kleinen Berichtigungen und Ergänzungen, gestaltet sich sein sehr einfacher Beweis folgender Massen.

Stellt man die beiden Veränderlichen x und y ablenkend beziehlich dar, namentlich $x = e^{\downarrow\varphi} r$ und $y = f(x) = e^{\downarrow\psi} s$; so müssen, gleichwie y eine Function der Grundveränderlichen x ist, auch ψ und s Functionen der Grundveränderlichen φ und r sein, und man wird darzuthun haben, dass $s = 0$ werden könne, welchen Werth auch ψ annehmen möge, weil dann nothwendig auch $y = f(x) = 0$ werden muss.

Da die Function $f(x)$ eine *ganze* ist, so muss für $r = \infty$ auch $s = \infty$ ausfallen, und für *endliche* Werthe von r muss auch jener von s *endlich* bleiben. Weil ausserdem dieser der Function y angehörige Modul s nur absolut (beziehungslos) sein kann, so muss s, wenn die ihn bestimmenden Grundveränderlichen φ und r alle zuständigen Werthe von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ und von $r = 0$ bis $r = \infty$ nach und nach durchschreiten, wenigstens Einen *kleinsten* Werth besitzen.

Wenn sich daher beweisen lässt:
dass der zu was immer für Werthen der Grundveränderlichen φ und r gehörige Modul s der Function y, wofern er nicht selbst schon Null wäre, durch angemessene Änderung von φ und r verringert werden kann:
so folgt daraus unmittelbar, dass jener nothwendig vorhandene kleinste Werth des Modulus s nur $= 0$ sein kann, und dass demnach die auf ihn führenden Werthe von φ und r die Gleichung $s = 0$ und somit $x = e^{\downarrow\varphi}r$ die Gleichung $y = f(x) = 0$ befriedigen; wonach der behauptete Grundlehrsatz bewiesen sein wird.

Zum Beweise dieses Hilfssatzes werde angenommen, dass in der, dem Werthe der Grundveränderlichen $x = e^{\downarrow\varphi}r$ entsprechenden Function $y = f(x) = e^{\downarrow\psi}s$ der Modul s nicht $= 0$ sei; und dass, wenn x in $x' = x + h$ übergeht, wo $h = e^{\downarrow\Theta}p$ ist,

$$y' = f(x') = e^{\downarrow\psi'}s' \text{ erfolge.}$$

Dann hat man nachzuweisen, dass Θ und p immer so gewählt werden können, dass $s' < s$ ausfalle.

Die Entwicklung von $f(x') = f(x + h)$ nach Potenzen von h gibt nun

$$y' = f(x') = f(x) + B_1\, h + B_2\, h^2 + B_3\, h^3 + \ldots\ldots + h^n,$$

wo die Coefficienten B_1, B_2, B_3, ... im Allgemeinen beliebig ablenkend beziehlich sein werden, wie

$$B_1 = e^{\downarrow\beta_1}b_1,\quad B_2 = e^{\downarrow\beta_2}b_2, \ldots.$$

und einige aus ihnen auch $= 0$ sein können. Sei nun der erste nicht verschwindende solche Coefficient $B_m = e^{\downarrow\beta_m}b_m$; so hat man

$$f(x') = f(x) + B_m\, h^m + B_{m+1}h^{m+1} + \ldots. + h^n,$$

oder wenn man durchweg die ablenkend bezogenen Werthe einführt,

$$e^{\downarrow\psi'}s' = e^{\downarrow\psi}s + e^{\downarrow(\beta_m + m\,\Theta)}b_m\, p^m + e^{\downarrow(\beta_{m+1} + \overline{m+1}\,\Theta)}b_{m+1}\, p^{m+1} + \ldots. + e^{\downarrow n\Theta}p^n.$$

Die algebraische Summe zur Rechten des Gleichheitszeichens lässt sich nun (gemäss §. 99) als ein von einem Fixpunkte O (Fig. 43) ausgehender gebrochener Zug $\overline{OABCD \ldots. IK}$ darstellen, dessen Seiten der Reihe nach

$$OA = s,\ AB = b_m p^m,\ BC = b_{m+1}p^{m+1}, \ldots.\ IK = p^n$$

sind, und mit der fixen Grundrichtung OX die Winkel

$$\psi,\quad \beta_m + m\,\Theta,\quad \beta_{m+1} + \overline{m+1}\,\Theta, \ldots.\ n\Theta$$

machen, und dessen gleichgeltender Radiusvectorzug $\overline{OK}$ die Länge s' hat und den Neigungswinkel $(OK, OX) = \psi'$ bildet.

Damit aber, wie gefordert wird, $s' < s$ ausfalle, kann man über die Grössen Θ und p wie folgt verfügen.

1. Man mache, dass die *erste* Seite AB auf den Radiusvector OA *zurückfalle*, folglich dass ihr Winkel $(AB, OX) = (OA, OX) + \pi$

oder $$\beta_m + m\Theta = \psi + \pi$$
werde; dazu muss man den Winkel

(1) $$\Theta = \frac{\psi + \pi - \beta_m}{m} \quad \text{wählen.}$$

2. Man bemesse die Länge der Seite AB so, dass ihr Endpunkt B zwischen A und O zu liegen komme; man mache also $AB < AO$, oder $b_m p^m < s$, folglich mache man den Radiusvector

(2) $$p < \sqrt[m]{\frac{s}{b_m}}.$$

3. Man *verkürze* den übrigen gebrochenen Zug $\overline{BCD \ldots K}$ dermassen, dass seine absolute Länge kürzer als jene der ersten Seite AB sei, nämlich dass $BC + CD + \ldots + JK < AB$ sei.

Diess würde bereits *erreicht* sein, wenn von den *Coefficienten* $B_1, B_2, B_3, \ldots B_{n-1}$, 1, alle bis auf den *letzten* 1, *verschwunden* wären, folglich
$$m = n, \quad B_m = 1, \quad b_m = 1, \quad \beta_m = 0$$
und sofort $$\Theta = \frac{\psi + \pi}{n}, \quad p < \sqrt[n]{s} \quad \text{wäre.}$$
Denn da würde K mit B zusammenfallen, und sonach bereits $OK = OB < OA$ oder $s' < s$ sein.

Ist aber der erste nicht verschwindende Coefficient B_m *vor dem letzten*, also $m < n$, so muss $$b_{m+1} p^{m+1} + b_{m+2} p^{m+2} + \ldots + p^n < b_m p^m$$
gemacht werden.

Sei b die *kleinste* der absoluten Zahlen $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots b_{n-1}$, 1, so muss, wenn man diese alle in der letzten Ungleichung durch b ersetzt, weil auch p absolut ist, um so mehr
$$bp^{m+1} + bp^{m+2} + \ldots + bp^n < b_m p^m$$
sein. Theilt man hier durch p^m und b, so wird
$$p + p^2 + p^3 + \ldots + p^{n-m} < \frac{b_m}{b},$$
folglich, wenn man diese geometrische Reihe summirt,
$$p\,\frac{p^{n-m} - 1}{p - 1} = p\,\frac{1 - p^{n-m}}{1 - p} < \frac{b_m}{b}.$$

Nimmt man, was jedenfalls zulässig ist, $p < 1$ an, so ist, weil $n - m$ positiv und $\overline{\gtrless} 1$ ist, $p^{n-m} \overline{\lessgtr} p$, daher $\frac{1 - p^{n-m}}{1 - p} \overline{\gtrless} 1$,

und sonach, wenn man jene Ungleichung durch diese theilt, $p < \frac{b_m}{b}$.

Der zuletzt gestellten Anforderung wird daher entsprochen, wenn man

(3) $\quad p < \left(1, \frac{b_m}{b}\right)$, d. h. < 1 und $< \frac{b_m}{b}$, nimmt.*)

Hat man es aber dahin gebracht, dass

$$BC + CD + \ldots . + JK < BA$$

ist; so muss, weil zwischen einerlei Grenzpunkten die *gerade* Linie jederzeit die *möglich kürzeste*, also $BK < BC + CD + \ldots JK$ ist, um so mehr

$BK < BA$ sein.

Beschreibt man nun um den Punkt B (Fig. 44) mit dem Halbmesser BK eine Kreislinie, so zertheilt diese die Strecke BA in einem Punkte L, welcher, weil B zwischen O und A liegt, mit dem Punkte O auf verschiedenen Seiten des Mittelpunktes B liegen muss. Mag daher O in diesem Kreise sich befinden oder nicht, so muss an jedem Punkte K derselben Kreislinie, zufolge eines bekannten Lehrsatzes vom Kreise, $OK \leqq OL$ sein. Gleichwie aber $BL = BK < BA$ ist, so ist auch
$OB + BL < OB + BA$ oder $OL < OA$, mithin auch jederzeit $OK < OA$ nämlich $s' < s$.

Die durch (1), (2) und (3) bestimmten Werthe von Θ und p leisten demnach der gestellten Forderung Genüge.

§. 145.

II. *Benützung der zweiten Darstellungsweise der Functionen einer Veränderlichen.*

Diese besteht darin, dass sowohl die Grundveränderliche x als auch die Function y als eine Linie in der Constructionsebene dargestellt und die Abhängigkeit beider Linien von einander erforscht wird. Auf den Beweis des fraglichen Grundlehrsatzes der algebraischen Gleichungen hat sie Professor *Ullherr* in dem ersten seiner beiden höchst einfachen Beweise in *Crelle's* Journal für die Mathematik 31. Bd., 3. H., Berlin, 1846, Nr. 16, S. 232 u. 233 auf folgende Weise angewandt.

Die ganze Function

$$y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots . + A_{n-1} x + A_n,$$

in der die Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots . A_n$ beliebig ablenkend beziehlich sein können, der *erste* und *letzte* aber *nicht Null* sind, nimmt, wenn man diese Coefficienten so wie die beiden Veränderlichen x und y allgemein ablenkend bezogen darstellt, namentlich überhaupt $A_m = e^{\downarrow\alpha_m} a_m$,

$$x = e^{\downarrow\varphi} r \quad \text{und} \quad y = e^{\downarrow\psi} s$$

annimmt, folgende Form an:

$$y = e^{\downarrow\psi} s = e^{\downarrow(\alpha_0 + n\varphi)} a_0 r^n + e^{\downarrow(\alpha_1 + \overline{n-1}\varphi)} a_1 r^{n-1} + e^{\downarrow(\alpha_2 + \overline{n-2}\varphi)} a_2 r^{n-2} + \ldots\ldots + e^{\downarrow\alpha_n} a_n$$

*) So glaube ich die von *Wittstein*, a. a. O. S. 234, Art. 6, gestellte durch ein geringes Versehen verfehlte dritte Bedingung einfach geben zu sollen.

und erleidet, bei der stetigen Veränderung von φ und r, nirgends eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit. Wird daher durch y, für gewisse Werthe von φ und r, der Punkt M (Fig. 45) bestimmt, so muss dieser seinen Ort stetig ändern, wenn φ und r, zugleich oder einzeln, sich stetig abändern.

Zur deutlicheren Einsicht in den Gang der Änderung von y lässt man den, die Veränderliche $x = c^{i\varphi}r$ repräsentirenden wandelbaren Punkt R eine gewisse Linie und zwar zunächst eine *Kreislinie* um den Punkt O als Mittelpunkt beschreiben, indem man den Radiusvector $r = OR$ constant hält und den Winkel φ von irgend einem bestimmten Winkel φ_0 aus nach und nach stetig wachsen oder abnehmen, also den Strahl $r = OR$ stetig sich umdrehen lässt. Dann muss auch der Punkt M eine stetige Linie beschreiben und bei $\varphi = \varphi_0 + m \cdot 2\pi$, wo m eine ganze Zahl ist, an denselben Ort zurückkommen, wie bei $\varphi = \varphi_0$; so dass diese Linie eine in sich selbst zurückkehrende krumme ist, auf welcher der beschreibende Punkt schon an alle Orte kommt, wenn der Winkel φ nur alle stetig sich folgenden Werthe eines Intervalls von einem vollen Winkel 2π annimmt, also der Strahl $r = OR$ eine volle Umschwenkung ausführt.

Jedem Werthe des Moduls oder Halbmessers $r = OR$ von 0 bis ∞, oder jeder der unzähligen concentrischen Kreislinien um den Pol O entspricht eine solche die Function y repräsentirende Curve; und alle diese Curven gehen aus einer derselben durch stetige Änderung hervor, wenn r sich stetig verändernd vorausgesetzt wird.

Jeden einzelnen Ausdruck von y kann man, insofern er vermöge der letzten Gleichung als eine algebraische Summe sich ausweist, vermöge §. 99, durch einen gebrochenen Zug $\overline{OABC \ldots LM}$ darstellen, dessen Seiten

$$OA = a_0 r^n, \quad AB = a_1 r^{n-1}, \quad BC = a_2 r^{n-2}, \ldots . \; LM = a_n$$

sind. Bei diesem Zuge muss, bei fortwährendem Wachsen von r, das Verhältniss der Summe aller Seiten hinter der ersten, zu dieser ersten selbst, nämlich

$$\frac{AB + BC + \ldots + LM}{OA} = \frac{a_1}{a_0 r} + \frac{a_2}{a_0 r^2} + \ldots . + \frac{a_n}{a_0 r^n}.$$

um so kleiner werden, je grösser r wird. Da ferner der Strahl AM kleiner als die gebrochene Linie $ABC \ldots . LM = AB + BC + \ldots + LM$ ist, so muss um so mehr das Verhältniss $AM : OA$ abnehmen. Daher muss im Dreiecke AOM auch der der Seite AM gegenüber liegende oder der von den beiden Radienvectoren OA und OM eingeschlossene Winkel AOM desto mehr abnehmen, je mehr r wächst.

Der Punkt A, als Repräsentant des ersten Gliedes $e^{i(\alpha_0 + n\varphi)}a_0 r^n$ im Ausdrucke von y, macht aber auf der um O mit dem Halbmesser $a_0 r^n$ beschriebenen Kreislinie n Umläufe, während φ ein Intervall von 2π durchläuft, oder während der Punkt R seine Kreislinie einmal durchwandelt. Mithin muss auch der Punkt M, bei einem hinreichend grossen Werthe von r, eine stetige in sich zurückkehrende Curve beschreiben, welche $n$mal den Punkt O umschlingt, während der Winkel φ um einen vollen Winkel 2π stetig zu- oder abnimmt.

Stellt man sich nun den Halbmesser $r = OR$ von diesem hinreichend grossen Werthe an stetig *abnehmend* vor; so wird die geschlungene Curve sich stetig verändern, bis zuletzt bei $r = 0$ alle Punkte derselben in denjenigen Punkt U zusammenfallen, welcher der geometrische Repräsentant des letzten Gliedes $e^{\downarrow \alpha_n} a_n$ ist. Diese Curve, welche anfangs $n$mal diesen Punkt U umschlingt, kann sich aber nicht auf ihn zusammenziehen, ohne vorher wenigstens einmal und im Allgemeinen höchstens $n$mal, durch den Punkt O gegangen zu sein. Da aber, wo ein Punkt der Curve mit dem Pole O zusammenfällt, sind die ihm entsprechenden Werthe von φ und r, also auch von x, so, dass sie s, also auch y zu Null machen.

Es gibt daher im Allgemeinen höchstens n und insbesondere wenigstens Einen Wurzelwerth der algebraischen Gleichung $y = 0$; und wenn auch in einzelnen Fällen eine oder mehrere Schlingen der Curve gleichzeitig im Punkte O verschwänden, so gäbe es dennoch wenigstens Einen Wurzelwerth dieser Gleichung.

§. 146.

III. Anwendung der dritten Darstellungsweise der Functionen.

Diese wurde zum Beweise des in Rede stehenden Grundlehrsatzes der Gleichungen zuerst von *Gauss* in seiner Dissertations-Abhandlung: „Demonstratio nova Theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. 4. Helmstadii. 1799," in einer Weise benützt, welche auch *Drobisch* in §. 75 u. ff. a. a. O. deutlich erörtert hat.

Die vorgelegte algebraische Gleichung wird complex dargestellt, nämlich

$$y = y' + \downarrow y'' = f(x' + \downarrow x'') = F(x', x'') + \downarrow \mathfrak{F}(x', x''),$$

und in die beiden gleichgeltenden Gleichungen

$$y' = F(x', x''), \qquad y'' = \mathfrak{F}(x', x'')$$

zerspalten. Danach construirt man die diesen zwei Gleichungen entsprechenden Flächen und sucht ihre erweisbar jederzeit möglichen Durchschnittslinien mit der Ebene der x oder der x' und x'', deren einzelne Gleichungen $F(x', x'') = 0$ und $\mathfrak{F}(x', x'') = 0$ sind. Von diesen Linien wird nun dargethan, dass sie auch einander durchschneiden müssen, daher für ihre Durchschnittspunkte beide letzten Gleichungen mit einander gleichzeitig bestehen und sofort auch $y = 0$ wird, folglich dieselben Durchschnittspunkte die Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung repräsentiren.

Siebentes Hauptstück.

Auslegung der Gleichungen des Zusammenhanges allgemeiner Zahlen, wenn einige oder alle solche Zahlen complex — ablenkend beziehlich — werden.

---

§. 147.

Vorbereitung.

Bevor ich auf diesen Gegenstand selbst übergehe, sehe ich mich genöthigt, *vier Fragen* hier *wörtlich* anzuführen, die mir schriftlich aufgeworfen worden sind, und deren Beantwortung nach der Meinung des Fragestellers aus der Lehre von der geometrischen Construction der imaginären Grössen geschöpft werden sollte. Zwar tragen sie insgesammt *auffallende Rechnungsfehler* oder *Fehlschlüsse* in sich, und müssen darum verworfen werden; allein aus ihnen wird sich uns dennoch diejenige *wichtige Frage ahnen* lassen, die man wahrscheinlich stellen wollte, und deren Beantwortung wir sodann versuchen werden.

1te *Frage.* „Setzt man in $y - y' = a\,(x - x')$

$$x' = p + q\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad y' = p' + q'\sqrt{-1},$$

so erhält man

$$y - p' = \frac{q'}{q}\,(x - p),$$

die Gleichung einer reellen Geraden; wie hängt deren Lage mit den complexen Coordinaten zusammen?"

Erläuterung. Sind x, y die laufenden und x', y' ein paar stehende rechtwinklige Coordinaten, und lässt man in der bekannten Gleichung einer durch den Punkt (x', y') gehenden geraden Linie

$$y - y' = a\,(x - x')$$

die stehenden Coordinaten x', y' complex werden, nämlich

$$x' = p + q\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad y' = p' + q'\sqrt{-1};$$

so erhält man

$$y - p' - q'\sqrt{-1} = a\,(x - p) - aq\sqrt{-1}.$$

Wird nun das Reelle mit einander und das Imaginäre wieder unter sich identificirt, so erfolgt

$$y - p' = a\,(x - p), \quad q' = aq,$$

daher, wenn a eliminirt wird, die Gleichung

$$y - p' = \frac{q'}{q}\,(x - p)$$

einer reellen Geraden; von der man frägt, wie deren Lage mit den complexen Coordinaten zusammenhänge.

Antwort. Vor Allem ist hier zu erinnern, dass man in einen *argen Fehler* verfällt indem man bloss die particulären Werthe x', y' der Veränderlichen x, y, oder hier nur die besonderen stehenden Coordinaten x', y', welche den allgemeinen laufenden x, y entsprechen, in die complexe Form, $p + q\sqrt{-1}$ und $p' + q'\sqrt{-1}$, übergehen lässt und nicht auch diese Veränderlichen x, y selbst complex formt, namentlich

$$x = X' + X''\sqrt{-1},\quad y = Y' + Y''\sqrt{-1}\ \text{ setzt.}$$

Denn wohl begreift die Gesammtheit der Werthe einer complexen Veränderlichen $X' + X''\sqrt{-1}$ auch die reellen Werthe, wie X', da auch $X'' = o$ sein kann; allein *keineswegs und niemals kann der Inbegriff der Werthe einer reellen Veränderlichen x auch nur einen einzigen complexen Werth $p + q\sqrt{-1}$ in sich fassen.*

Wer daran noch zweifeln wollte, der erwäge nur, dass man in der Frage doch eigentlich bedingt, dass, wenn $x = x'$ wird, $y = y'$ werde. Wie können aber die reellen Grössen x, y den complexen x', y' gleich werden?

Setzt man nun aber auch noch x und y complex, so verwandelt sich, so lange a incomplex ist, die gegebene Gleichung in

$$Y' + Y''\sqrt{-1} - p' - q'\sqrt{-1} = a\,(X' + X''\sqrt{-1} - p - q\sqrt{-1});$$

und daraus findet man, Reelles und Imaginäres scheidend, die beiden Gleichungen

$$Y' - p' = a\,(X' - p),\quad Y'' - q' = a(X'' - q).$$

Diese nun gehören *scheinbar* (!) zwei geraden Linien an, welche gegen die Coordinatenaxen eben so wie die gegebene Gerade geneigt sind.

Allein selbst nach dieser Berichtigung würde es noch immer *voreilig* sein, wenn wir diese Geraden discutiren wollten. Denn wenn es sich auch leicht begreifen lässt, was man damit sagen will, *eine einzelne* der beiden ursprünglichen reellen rechtwinkligen Coordinaten x, y werde complex; nämlich: *entweder* die *Abscisse* x werde ersetzt durch den in der xy-Ebene enthaltenen winkelrechten complexen Coordinatenzug $X' + X''\sqrt{-1}$, und in seinem Endpunkte erhebe sich senkrecht auf dessen Ebene die Ordinate y; *oder* die *Ordinate* y werde ersetzt durch den im Endpunkte der Abscisse x anfangenden und mit seiner Ebene auf ihr senkrechten winkelrechten Coordinatenzug $Y' + Y''\sqrt{-1}$; da dort X', X'', y, hier x, Y', Y'', als drei gewöhnliche winkelrechte Raumcoordinaten, jedesmal einen Punkt im Raume bestimmen: so lässt sich doch (vergl. §. 141, *B*) nimmermehr einsehen, wie *beide* (!) an einander hängenden winkelrechten reellen Coordinaten x, y sich ersetzen lassen durch die beiden *gleichfalls zusammenhängenden* winkelrechten complexen Coordinatenzüge $X' + X''\sqrt{-1}$ und $Y' + Y''\sqrt{-1}$; indem von den nach einander folgenden *vier* gewöhnlichen Coordinaten X', X'', Y', Y'' jede spätere auf allen früheren zugleich senkrecht sein muss, und der Raum doch *nicht vier*, sondern immer nur drei *Dimensionen* hat.

Die letzte Ursache solcher Verirrung liegt in dem, vornehmlich in neuester Zeit, so beliebt gewordenen blossen *Zeichenrechnen*, wo man ohne Umstände, so oft's beliebt, für jeden Buchstaben, wie z. B. x, einen sogenannten negativen, $-x$, oder einen einfach imaginären, $x\sqrt{-1}$, oder endlich einen complexen, $x' + x''\sqrt{-1}$, einsetzen zu dürfen und das rechnende Zeichenspiel fortzusetzen befugt zu sein wähnt, ohne zur Rechenschaft sich

verpflichtet zu erachten, ob solcher Vorgang auch mit der Natur der von dem Buchstaben x vorgestellten Grösse vereinbarlich und sohin erklärbar sei.

2te *Frage.* „Setzt man in der Gleichung $y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$

$$x' = p + q\sqrt{-1},\quad y' = p' + q'\sqrt{-1},$$
$$x'' = p - q\sqrt{-1},\quad y'' = p' - q'\sqrt{-1},$$

so folgt ebenfalls $y - p' = \frac{q'}{q}(x - p)$,

und es wiederholt sich die vorige Frage"

Verdeutlichung. Durch die Substitutionen findet man nämlich vorerst

$x'' - x' = -2q\sqrt{-1}$, $y'' - y' = -2q'\sqrt{-1}$, und danach die Gleichung

$$y - p' - q'\sqrt{-1} = \frac{q'}{q}(x - p - q\sqrt{-1}) = \frac{q'}{q}(x - p) - q'\sqrt{-1},$$

daher sogleich
$$y - p' = \frac{q'}{q}(x - p).$$

Bescheid. So wie hier die vorige Verirrung und mit ihr die vorige Frage wiederholt wird, so müssen wir auch im Wesentlichen unsere *Antwort wiederholen.*

3te *Frage* „Die Einführung von complexen Coordinaten in die Gleichungen von Curven führt auf reelle Gleichungen anderer Curven; welches ist im Allgemeinen der geometrische Zusammenhang derselben mit den ersteren?"

Verdeutlichung und Entgegnung. Nehmen wir nur *ebene* Curven vor, da, wie leicht zu erachten, bei doppelt gekrümmten die Schwierigkeiten sich wiederholen und verstärken müssen. Sei also $f(x, y) = 0$

die allgemeinste Gleichung einer ebenen Curve, und lassen wir

$$x = x' + x''\sqrt{-1},\quad y = y' + y''\sqrt{-1}$$

werden, so erhalten wir

$$f(x' + x''\sqrt{-1},\ y' + y''\sqrt{-1}) = 0,$$

oder da diese Function wieder die allgemeine complexe Form annimmt,

$$\varphi(x', x'', y', y'') + \psi(x', x'', y', y'')\sqrt{-1} = 0,$$

folglich

$$\varphi(x', x'', y', y'') = 0,\quad \psi(x', x'', y', y'') = 0.$$

Diese beiden gleichzeitig bestehenden Gleichungen zwischen den *vier* Veränderlichen x', x'', y', y'' gehören aber bekanntlich im Allgemeinen einer *Fläche* (!) an, und nur in besonderen Fällen *zweien Curven*, oder auch bloss *Einer Curve.*

Z. B. Die Gleichung der *Kreislinie* $x^2 + y^2 = r^2$ verwandelt sich durch diesen Vorgang in

$$x'^2 + y'^2 - (x''^2 + y''^2) + 2(x'x'' + y'y'')\sqrt{-1} = r^2$$

und zerfällt also in die beiden Gleichungen

$$x'^2 + y'^2 - (x''^2 + y'')^2 = r^2,\quad x'x'' + y'y'' = 0,$$

welche daher einer *Fläche vierter Ordnung* zugehören.

Die Gleichung der *geraden Linie* $ax + by = c$ dagegen verwandelt sich in

$$ax' + by' + (ax'' + by'')\sqrt{-1} = c,$$

und zerfällt daher in die beiden Gleichungen,

$$ax' + by' = c, \quad ax'' + by'' = 0,$$

welche *zweien Geraden* angehören.

Ausser dem hier aufgedeckten Fehlgriffe findet sich aber auch in dieser Frage wieder, wie in den beiden ersten, der nämliche Verstoss mit der unbedachten Einführung complexer Coordinaten.

4te *Frage*. „Die durch die zwei Durchschnittspunkte zweier in einer Ebene enthaltenen Kreise bestimmte Gerade ist auch dann noch reell, wenn der gegenseitige Abstand der Mittelpunkte der Kreise grösser als die Summe ihrer Halbmesser ist, und also keine reellen Durchschnittspunkte mehr gibt. Wie ist diess zu erklären?"

Erläuterung. Seien (Fig. 46) r, R die Halbmesser, und c die Centrallinie (Weite zwischen den Mittelpunkten O und Q) zweier Kreislinien; und man nehme den Mittelpunkt O der ersteren Kreislinie zum Anfang der Abscissen, die auf der Centrallinie gegen den andern Mittelpunkt hin positiv gezählt werden sollen. Sind dann x, y die laufenden rechtwinkligen Coordinaten der einen und anderen Kreislinie, so sind die Gleichungen dieser Linien bekanntlich

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (c-x)^2 + y^2 = R^2.$$

Beide verbunden sind eigentlich die Gleichungen des Durchschnittes der Kreislinien. Für ihn findet man durch Subtraction $\quad 2cx - c^2 = r^2 - R^2$

und hieraus
$$x = \frac{c^2 + r^2 - R^2}{2c},$$

daher durch Substitution und Reduction

$$y = \pm \frac{1}{2c}\sqrt{(c + r + R)(c + r - R)(c + R - r)(R + r - c)}.$$

Die erste dieser beiden letzten Gleichungen ist auch die Gleichung der durch die beiden Durchschnittspunkte gehenden, auf die Abscissenaxe senkrechten Geraden (der den beiden Kreisen gemeinsamen Sehne).

Wird nun $c > R + r$, so wird zwar y imaginär, x aber fällt noch immer reell aus, und weist also nach, dass es auch da noch immer eine reelle Gerade durch die Durchschnittspunkte beider Kreislinien gibt, wo doch thatsächlich keine solchen Durchschnittspunkte mehr existiren. „Wie ist diess zu erklären?"

Erklärung. Die Gleichung $x = \dfrac{c^2 + r^2 - R^2}{2c}$, welche für alle Werthe von c, r, R, reell bleibt, gehört allerdings einer auf der x-Axe senkrechten und sonach jederzeit bestimmbaren oder construirbaren, also reellen Geraden zu; allein diese kann die „durch die beiden *Durchschnittspunkte bestimmte*" Gerade keineswegs auch dann noch verbleiben, wenn diese Punkte gar nicht mehr existiren; da man ja zu solchem Bestimmen gerade die Existenz dieser Punkte bedingt. Genauer ausgedrückt ist diese Gerade — wie

man sich bei allen anderen Linien jederzeit auszusprechen pflegt — eine diese Punkte, im Verein mit anderen Linien, bestimmende, sie enthaltende Linie. Durch jene Gleichung erfährt man daher nur so viel, dass, wofern Durchschnittspunkte beider Kreislinien wirklich existiren, sie sich in derjenigen Geraden befinden müssen, deren Gleichung $x = \frac{c^2 + r^2 - R^2}{2c}$ ist. In der Frage wird aber irrig so argumentirt:

„Weil diese Gerade immer bestimmbar (reell) ist, so müssen darin jedesmal ein paar Durchschnittspunkte der Kreislinien sich befinden."

Existirt ja doch auch jede der beiden *Kreislinien* selbst immer, wie gross auch r, R, c sein mögen; muss doch auch jede aus ihnen beide Durchschnittspunkte enthalten, *wenn* sie wirklich existiren: und dennoch findet man's gar nicht befremdlich, dass manchmal auf keiner von beiden Kreislinien ein solcher Durchschnittspunkt sich befindet.

Noch mehr! Jene Gleichung gibt *keineswegs unbedingt* die Abscisse x der Durchschnittspunkte an. Denn vermöge der ersten Stammgleichung muss ja $x^2 \leqq r^2$, also der Zahlwerth von x kleiner oder höchstens noch so gross als jener von r sein. Bloss unter dieser Bedingung kann jene Gerade die Durchschnittspunkte der Kreise enthalten. Ist aber $c > R + r$, folglich $R < c - r$; so wird

$$x > \frac{c^2 + r^2 - (c - r)^2}{2c} \quad \text{also } x > r.$$

Mithin fällt x hier nicht unterhalb die nothwendig bedungene Grenze, daher darf jener Ausdruck von x für die vorherige Bestimmung auch gar nicht mehr angewendet werden, und sonach befinden sich in jener entsprechenden Geraden keine Durchschnittspunkte der Kreislinien; oder eine solche, diese Durchschnittspunkte mit bestimmende, Gerade gibt es hier schlechterdings nicht; sie ist also auch *nicht mehr reell* (wirklich vorhanden), wie in der Frage irrig behauptet wird.

Diese irrthümliche Ansicht entsprang demnach lediglich aus der Nichtbeachtung der Grenze der Abscisse x.

Anmerkung. Dass man eine ähnliche haltlose Einwendung auch rücksichtlich des *Durchschnittskreises zweier Kugeln* machen könne, ist leicht zu finden.

§. 148.

Berichtigte Frage.

Indem ich den Ruhm des Ersinnens ähnlicher fehlgreifender Fragen gern Anderen überlasse, wende ich mich nun zur folgenden durch sie angeregten neuen und höchst wichtigen *Frage*:

Wenn in einer Gleichung, oder in mehreren unter sich verbundenen Gleichungen, eine oder **einige allgemeine** *(durch Buchstaben angedeutete), ursprünglich* **direct bezogene** *Grössen* **in ablenkenden Beziehungen** *oder complex genommen werden sollen:*

wie hat man da ihren Zusammenhang mit einander und mit den übrigen, in ihrer Beziehung nicht geänderten, Grössen zu **deuten**? *unter welchen Umständen oder Bedingungen hat oder erhält eine solche Abänderung der Beziehungen einen* **klaren Sinn?**

A. Zuvörderst möge hier der am häufigsten in Anwendung kommende *Fall hervorgehoben* werden, wo nur *Eine* durch lauter direct beziehliche allgemeine Grössen ausgedrückte *Unbekannte,* für gewisse Werthe dieser Grössen, *ablenkend beziehlich* oder complex *ausfällt.*

Da ersieht man leicht, dass, *wenn die Natur dieser Unbekannten keinerlei Ablenkung,* sondern höchstens nur Gegensatz, *ihrer Beziehung verträgt,* der für sie sich darbietende ablenkend beziehliche Rechnungsausdruck oder Werth erkennen lässt, dass bei jenen Werthen der bekannten Grössen diese Unbekannte geradehin *unmöglich* (selbst nicht einmal imaginär, einbildlich) ist, mit ihnen ganz und gar nicht zusammen bestehen kann, und dass demnach jene angegebenen Werthe selbst eigentlich mit einander unvereinbar sind, folglich die vorliegende Rechnungsaufgabe schon in ihren Grundbedingungen, in ihrer Anlage unstatthaft, widersinnig ist.

Gerade so sind sogar bloss *gebrochene* Zahlen *unmögliche Auflösungen,* wenn die Unbekannte ihrer Natur nach *nur ganz* sein, oder nur gewisse zulässige Nenner haben kann; *irrationale* dort, wo die Unbekannte nur rational sein darf, insbesondere unstetig ist; *negativ beziehliche* da, wo die Unbekannte keine entgegengesetzte Beziehung gestattet; endlich auch alle jene Werthe der Unbekannten, welche gewisse festgestellte *Grenzen überschreiten.* Erläuterungen und Beispiele hiezu enthalten die Lehrbücher und Beispielsammlungen der Algebra.

Dort hingegen, *wo die Natur der fraglichen* Unbekannten eine ablenkende Beziehung wirklich gestattet, und diese sich unschwer begreifen lässt, bietet die Deutung eines solchen ablenkend beziehlichen Werthes der Unbekannten eben so wenig Schwierigkeit dar, als die der entgegengesetzt beziehlichen.

Zuweilen gestattet der algebraische Ausdruck der Unbekannten mehrere Werthe, oder er ist *mehrförmig, mehrdeutig.* In einem solchen Falle prüft man jeden einzelnen Werth und behält nur die mit der Natur der Unbekannten vereinbarlichen als Auflösungen der Aufgabe bei; indem man alle übrigen als unmöglich, unstatthaft verwirft.

§. 149.

Überzählige Auflösungen der Aufgaben.

Hier nun wirft sich die höchst wichtige, zwar schon vielfältig angeregte, aber wie es scheint (wenigstens in allen jenen vielen von mir gelesenen Lehrbüchern und Sammelwerken) noch nicht gründlich und umfassend genug beantwortete *Frage* auf:

Wie kommt es, dass eine Gleichung nebst der von der Aufgabe unmittelbar geforderten und sie befriedigenden Auflösung gleichwohl auch noch andere *überflüssige* oder *überzählige Werthe der Unbekannten* liefern kann, welche die Aufgabe gar nicht auflösen, ihr

gar nicht zugehören, dass folglich *die Gleichung mehr gibt, als man von ihr verlangt?* Oder wie ist das Erscheinen der, der vorgelegten Aufgabe, *fremden Wurzelwerthe* der ihr angehörigen Gleichungen zu erklären?

Folgende *Aufklärung* dürfte hoffentlich genügen.

Bei der Auflösung jeglicher algebraischen Rechnungsaufgabe unterscheidet man bekanntlich *drei Hauptacte*:

I. die Aufstellung der Bestimmungsgleichungen,

II. die Auflösung dieser Gleichungen,

III. die Erforschung oder Erörterung (Discussion) der Wurzelwerthe dieser Gleichungen, ob und wiefern sie die gestellte Aufgabe selbst auflösen.

Betrachten wir nun diese Acte einzeln und umständlich.

I. *Aufstellung der Gleichungen.*

Wenn man sich anschickt, eine Rechnungsaufgabe mittels Gleichungen aufzulösen, so pflegt man bekanntlich

1. alle in ihr vorkommenden, gleichviel ob bekannten oder unbekannten, Grössen von einerlei Ar als mit der nämlichen, bald ausdrücklich angeführten, bald aber auch nur stillschweigend in Gedanken zurückbehaltenen derartigen Messeinheit ausgemessen, durch Zahlen, *Zahlwerthe* genannt, darzustellen.

2. Von diesen Zahlen nun werden die *unbekannten* nothwendig stets durch Buchstaben vorgestellt, von den bekannten aber bloss die allgemeinen; während die besonderen und völlig bestimmten Zahlen, wie sonst überall und immer, durch Ziffern dargestellt werden, oder auch zuweilen zur Verallgemeinerung einer Aufgabe oder ihrer Auflösung, selbst wieder durch gewisse sie stellvertretende Buchstaben.

3. Sämmtliche diese in der Rechnung oder mathematischen Forschung zu betrachten kommenden Zahlen werden unter sich nach denjenigen Rechnungsweisen in Gleichungen — seltener in Ungleichungen*) — verbunden, welche der sprachliche Ausdruck oder die Natur der Aufgabe vorzeichnet. Dann sind diese Gleichungen der *algebraische* Ausdruck oder Ausspruch der vorgelegten Rechnungsaufgabe oder Forschung, gleichsam die in die Sprache der Algebra übersetzte und mit den Schriftzeichen dieser Wissenschaft niedergeschriebene Aufgabe selbst; sie machen die Rechnungsanlage der ganzen mathematischen Forschung oder der Auflösung der Aufgabe aus.

4. *Von diesen Bestimmungsgleichungen* der Aufgabe *gelten* nun offenbar *folgende*, bis jetzt sowohl in Lehrbüchern als auch in Streitschriften viel zu wenig beachtete, *Bemerkungen*:

a) In allen solchen Gleichungen kommen lediglich *nur Zahlen*, und nie etwas Anderes vor; in ihnen befindet sich nichts von jenen Menschen, Thieren, Dukaten, Gulden, Tha-

*) Wenn man will, kann man jede Ungleichung leicht auch in eine Gleichung umstalten, indem man dem einen Theile derselben entweder einen willkürlichen Summand oder einen wählbaren Factor zur Ausgleichung zusetzt. So z. B. $P > Q$ kann durch $P = Q + S$ oder durch $P = fQ$ ersetzt werden, wofern S und f innerhalb gewisser Grenzen wählbar bleiben.

ern oder sonstigen Münzen und Geldstücken, von den Klaftern, Ellen, von den Pfunden oder anderen Gewichten, von den Tagen, Stunden oder anderen Zeiten, von jenen Abscissen, Ordinaten oder anderen Strecken, von jenen Winkeln, Flächen- oder Körperräumen u. s. f., von denen die Aufgabe spricht. Die Einheiten jeglicher Art der in der Aufgabe erwähnten Grössen sind spurlos aus den Gleichungen herausgefallen und können demnach auch durch jede andere gleich- oder ungleichartige Einheit ersetzt werden, so dass z. B. wo vordem Pfunde gezählt wurden, nunmehr Ellen gezählt werden können. Keiner Zahl, die in einer solchen Gleichung steht, kann man ankennen, was für Messeinheiten sie zählt, welche Art von Grössen sie vorstellt, ob Gewichte, Zeiten, Längen oder sonst was.

b) Jeder in der Gleichung stehende Buchstabe, wie $x, y, z, \ldots$ oder $a, b, c, \ldots m, n, p, \ldots$, stellt die betreffende Zahl oder beziehungsweise die von dieser stellvertretene Grösse, nicht allein hinsichtlich ihrer *Grossheit* oder *Zahlform*, sondern auch in Absicht auf ihre etwaige algebraische *Beziehung*, so wie auch noch in Bezug auf *Stetigkeit* in ihrer Veränderung dar. Die Zahl, die der Buchstabe vorstellt, kann nämlich nicht etwa bloss so und so gross, oder auch nur über oder unter einer gewissen Grenze, sondern völlig beliebig gross gedacht werden; nicht allein ganz oder gebrochen, also rational, sondern auch irrational, also von was immer für einer Zahlform sein; nicht nur absolut (unbezogen), sondern auch negativ, ja sogar beliebig ablenkend beziehlich gedacht werden; und endlich lässt sich eben diese Zahl und ihre ablenkende Beziehung allmälig alle denkbaren Stufen durchwandernd vorstellen. Dem Buchstaben, als Zahlzeichen, sieht man, in Anbetracht der Grösse, Form, Beziehung, Veränderlichkeit der durch ihn bezeichneten Zahl keinerlei Besonderheit an, welche die Aufgabe ihr auferlegt. Im Buchstaben steckt daher als beliebig denkbar verborgen: Art der Grösse, ihr durch Zahlen ausgesprochenes Wiegross, ihre Form oder Erzeugungsweise aus der gewählten Messeinheit mittels aliquoten Setzens, ihre algebraische Beziehung, ihre (stetige oder unstetige) Veränderlichkeit.

c) In den Bestimmungsgleichungen der Rechnungsaufgaben finden sich daher keine jener *Nebenbedingungen* vor, welche diese Aufgaben über Grenzen und Eigenheiten der in ihnen angeführten Grössen und Zahlen vorzeichnen; eben so wenig jene Bedingungsgleichungen oder -Ungleichungen, die zwischen manchen bekannten Grössen bestehen sollen.

d) Gesammte *Rechnungsweisen*, nach denen in den Bestimmungsgleichungen gerechnet werden soll, als: die Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Potentiation, Radication und Logarithmation, folglich auch die sie andeutenden *Rechnungszeichen* sind jederzeit *im algebraischen Sinne* zu nehmen.

e) Eine solche *Bestimmungsgleichung* oder ein System solcher Gleichungen, worauf irgend eine Rechnung führt, *sagt* daher bloss:

„Man sucht eine Zahl x oder mehrere Zahlen $x, y, z, \ldots$, im allgemeinsten algebraischen Sinne dieses Wortes, die unter sich und mit gewissen bekannten und in eben diesem umfassenden Sinne genommenen, Zahlen $a, b, c, \ldots$, wohl auch mit manchen angegebenen besonderen Zahlen, dergestalt zusammenhängen, dass sie jener einen Gleichung oder diesen mehreren Gleichungen Genüge thun.“

f) Desswegen kann eine solche Gleichung oder ein derlei System von Gleichungen, worauf die Rechnungsaufgabe führt, nicht allein der algebraische Ausspruch von dieser einen Aufgabe, sondern auch jener von *unzählig vielen* Aufgaben sein, in denen zwar die Art der von den Zahlen vorgestellten Grössen, der Betrag, die Form, Beziehung, Veränderlichkeit derselben, mannigfaltig sich abändern kann, aber dennoch dieselben Zahlen auf einerlei Weise unter sich in Rechnung verbunden werden. Unter diesen Aufgaben kann es daher auch *wieder unzählig viele* geben, bei denen alle allgemeinen, durch Buchstaben vorgestellten Zahlen stetig veränderlich, beliebig gross, wie immer geformt und bezogen sind, und diese Aufgaben können daher allen übrigen, auf die nämlichen Gleichungen hinleitenden als Gattungsvorbild (generelles Prototyp) dienen.

§. 150.

II. *Auflösung der Gleichungen.*

Die für die Aufgabe aufgestellten Bestimmungsgleichungen, welche bloss Zahlen der allgemeinsten Gattung enthalten, werden nun nach den bekannten mannigfaltigen Weisen, als: Transformation, Elimination, u. s. f. *aufgelöst*, d. h. alle jene Zahlen gesucht, welche für die Unbekannten gesetzt, beide Theile der Gleichungen gleich machen, oder den Gleichungen genügen.

Dabei *darf man* jedoch *nicht übersehen*, dass durch manche solche Auflösungsweisen theils Wurzelwerthe der ursprünglichen Gleichungen *herausfallen*, theils andere wieder *zuwachsen* können. *Jenes Herausfallen von Wurzelwerthen lässt sich verhüten*, wenn man die vorkommenden Rechnungsausdrücke hinreichend vieldeutig nimmt, oder so vielerlei Gleichungen einführt, als solcher mehrdeutiger Formen sich ergeben. *Dieses Einschleichen fremder Wurzelwerthe* in die später entstehenden Gleichungen dagegen *ist nicht leicht zu vermeiden*, wenn anders die Endgleichungen und Endergebnisse in gefälliger gedrängter Rechnungsform erscheinen sollen. So z. B. bietet die bekannte Summenform einer begrenzten geometrischen Grössenreihe $s = a.\frac{q^n - 1}{q - 1}$,

wenn q zu suchen ist, als Gleichung $q^n - 1 - \frac{s}{a}(q - 1) = 0$ auch den Wurzelwerth $q = 1$ dar, welcher der ursprünglichen Summenform

$$s = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$$

völlig fremd ist, und nur durch die Multiplication mit $q - 1$ eingeführt wurde.

Man muss daher von den jeder Ausgangs- oder Bestimmungsgleichung *eigenen* Wurzelwerthen die ihr *fremden* unterscheiden. Jene eigenen genügen nicht bloss den Ausgangsgleichungen, sondern auch den Schlussgleichungen; die fremden dagegen, weil sie nur durch die Umwandlungen der Ausgangsgleichungen nach und nach hineinkommen, befriedigen zwar die abgeleiteten und Endgleichungen, keineswegs aber die Stamm- oder Ausgangsgleichungen.

§. 151.

III. *Discussion der Wurzelwerthe der Bestimmungsgleichungen.*

Hat man die Bestimmungsgleichungen, auf welche eine Aufgabe geführt hatte, aufgelöst, so muss man

1. *sämmtliche*, diesen Gleichungen, *fremde Wurzelwerthe* von jeder weiteren Untersuchung *ausschliessen*; weil selbe, da sie schon diese Gleichungen nicht befriedigen, noch weniger die Aufgabe selbst auflösen können. Somit bleiben *bloss die* den ursprünglichen Bestimmungsgleichungen *eigenthümlichen Wurzelwerthe zu erforschen*, ob einige und welche aus ihnen der gestellten Aufgabe selbst genügen.

2. Dabei gelten aber, als allgemein leitende Grundgedanken, die folgenden *Wahrheiten*:

a) *Die Auflösung der Bestimmungsgleichungen* einerseits und *die Auflösung der eigentlichen, auf* sie führenden *Aufgaben* andererseits sind strengstens von einander zu unterscheiden; so zwar, dass die Auflösungen der Bestimmungsgleichungen als *Gattungen*, jene der Aufgaben als *Arten* anzuerkennen sind.

b) Was in die *Art* gehört, das muss auch in die *Gattung* gehören, nicht aber umgekehrt. Darum müssen die *Auflösungen der Aufgabe*, wenn sie sonst wirklich existiren, *sich unter den gesammten Auflösungen der Bestimmungsgleichungen vorfinden*, wenn anders keine von diesen ausgelassen oder weggeworfen worden ist; allein *keineswegs muss jede Auflösung der Bestimmungsgleichungen auch schon eine Auflösung der Aufgabe sein!* Jede Auflösung der Aufgabe muss nämlich auch eine Auflösung der Gleichungen sein, nicht aber umgekehrt. Was den Gleichungen nicht genügt, kann auch der Aufgabe nicht genügen, allein gegentheilig kann Manches den Gleichungen genügen, was der Aufgabe doch nicht genügt, oder eine Auflösung der Gleichung *kann* allerdings, *muss* aber *nicht* auch schon eine Auflösung der Aufgabe sein; ja sie ist es manchmal in der That nicht.

Die Gleichungen sind nämlich nicht immer die *ganze* Aufgabe, da — wie bereits oben (§. 149, 4, *c*) erwähnt — manche Forderungen, Nebenbedingungen oder Einschränkungen (Restrictionen) der Aufgabe sich nicht in Gleichungen bringen lassen.

3. Was da statt findet, ob ein in Untersuchung genommener Wurzelwerth der Gleichungen auch die Aufgabe auflöst oder nicht, muss die Natur der gesuchten Grösse entscheiden. Darum müssen nach Umständen bald die unganzen, bald die irrationalen, bald die zu grossen oder zu kleinen, oft die negativ beziehlichen und häufig die ablenkend beziehlichen (imaginären und complexen) Wurzelwerthe der Gleichungen, als Nichtauflösungen der auf diese Gleichungen führenden Aufgabe, verworfen werden.

4. Bei dieser Untersuchung kann es sich nun ereignen, dass von allen gefundenen Wurzelwerthen der Bestimmungsgleichungen nur einige oder nur einer, oder wohl auch nicht ein einziger allen Beschränkungen und Anforderungen der Aufgabe genügt. Im letzten Falle ist die Aufgabe ganz und gar unmöglich, in ihren Bedingnissen widersprechend;

gleichviel, wesswegen die Wurzelwerthe ihr nicht Genüge leisten. Sonach kann eine Aufgabe unauflösbar sein, obwohl die ihr zugehörigen Gleichungen nirgends etwas Ungereimtes zu erkennen geben und keine imaginären, sondern nur reelle Wurzelwerthe liefern.

Schlussfolge. Indem man demnach die Gleichungen einer Aufgabe nach den allgemeinsten algebraisschen Rechnungsvorgängen auflöst, löst man eigentlich keine Grössengleichungen, sondern blosse *Zahlengleichungen* auf; folglich wird auch nicht die eigentlich vorgelegte Grössenaufgabe, sondern eine so *umfassende* Zahlenaufgabe aufgelöst, dass alle in ihren Gleichungen vorkommenden, durch Buchstaben bezeichneten, Zahlwerthe von Grössen keineswegs nur die betrachteten, sondern aufs allgemeinste genommene Grössen vorstellen, z. B. ablenkende Strecken oder Flächen. — Diese Bemerkung entkräftet zugleich den triftigen *Einwurf*, wienach man sich's doch erlauben dürfe, mit den Grössen einer Gleichung nach den gewöhnlichen Gesetzen zu rechnen, wenn gleich die gesuchten Grössen in Wirklichkeit unmöglich oder imaginär sind.

§. 152.

Auslegung der den Aufgaben nicht genügenden Wurzelwerthe der Bestimmungsgleichungen.

Ein eigenthümliches Interesse gewährt das Bestreben, den einer Aufgabe nicht Genüge leistenden und darum zu beseitigenden Wurzelwerthen ihrer Bestimmungsgleichungen dessenungeachtet eine Deutung zu verschaffen. Derlei Auslegungsversuche haben zu mancherlei Missgriffen und Streitigkeiten Anlass gegeben. *Der einzige richtige Vorgang ist* die Überordnung einer neuen Aufgabe über die gegebene eigentlich aufzulösende, oder die Unterordnung (Subsumtion) der vorgelegten Aufgabe als einer engeren eingeschränkteren unter eine weitere umfassendere, die man sich auszudenken hat. Man ersinnt oder schafft nämlich, wo möglich, zu der vorgelegten Aufgabe eine allgemeinere, ausgebreitetere, in der jene selbst als einzelner (individueller) oder besonderer (specieller, particulärer) Fall mit einbegriffen ist.

Mittel dazu ist *überhaupt:* Verallgemeinerung (Generalisation) oder Erweiterung mancher in der aufzulösenden Aufgabe vorkommenden Begriffe, Merkmale oder Bedingungen, in der Art, dass die neue umfassendere Aufgabe manche oder alle diejenigen Wurzelwerthe der, auch für sie noch immer giltigen, Bestimmungsgleichungen, als ihre Auflösungen, aufnehmen kann, welche die ursprünglich gegebene beschränkte Aufgabe schon verwerfen musste.

Hier insbesondere soll dieses Verfahren bloss in der Absicht angewendet werden, um den bei der Auflösung von Aufgaben sich ergebenden complexen — *ablenkend beziehlichen* — Wurzelwerthen ihrer Bestimmungsgleichungen Deutung und Geltung zu verschaffen.

Erläuterndes Beispiel.

Wählen wir zur Verdeutlichung dieses Vorganges die letzte der obigen Fragen (in §. 147).

In ihr fordert man eigentlich die rechtwinkligen Coordinaten x, y des Durchschnittspunktes zweier in einerlei Ebene befindlicher Kreislinien von den Halbmessern r, R, deren Mittelpunkte um c von einander abstehen.

Diese Forderung führt auf die beiden Bestimmungsgleichungen

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (c-x)^2 + y^2 = R^2,$$

und gibt für die drei bekannten Grössen c, r, R gemäss der bekannten Natur der Dreiecke, deren eines hier jenen in voraus angenommenen Durchschnittspunkt und die beiden Kreismittelpunkte zu seinen drei Spitzen hat, noch die Bedingungsungleichungen

$$r + R > c, \quad r + c > R, \quad R + c > r.$$

Für die Unbekannten x, y wird zugleich stillschweigend bedungen, dass sie zu gewissen zwei winkelrechten Axen parallele Strecken, und an die Grenzungleichungen

$$val.\ abs.\ x \leqq val.\ abs.\ r$$

$$val.\ abs.\ y \leqq val.\ abs.\ (r, R)$$ gebunden seien.

Jene Gleichungen liefern sofort für x, y die Ausdrücke

$$x = \frac{c^2 + r^2 - R^2}{2cr}$$

$$y = \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(c + r + R)(c + r - R)(c + R - r)(r + R - c)}.$$

Wie wir bereits oben (§. 147) fanden, muss, wenn bei den festgestellten Kreishalbmessern r, R die Weite c aus ihren Grenzen heraustritt, auch x ihre Grenzen überschreiten, und die y muss imaginär, transvers beziehlich ausfallen.

Nun kann man sich aber in der Erklärung eines solchen Falles nicht damit helfen, dass man vorgibt, die imaginäre y stelle sich auf ihre frühere Richtung, also auch auf die Ebene der xy senkrecht auf, und der Durchschnittspunkt der beiden Kreislinien, als dritte Spitze desjenigen Dreieckes, dessen beide anderen Spitzen die zwei Kreismittelpunkte sind, werde *imaginär* (eingebildet, einbildlich). Denn wer kann sich wohl einbilden, dass der Durchschnittspunkt zweier Kreislinien ausserhalb ihrer *gemeinschaftlichen* Ebene sich befinde? Oder wer kann sich ein Dreieck einbilden, das *nur zwei Spitzen* hat, oder in welchem eine Seite *grösser* ist als die Summe der beiden anderen?

Man ist daher genöthigt, einzugestehen, dass die vorgelegte Aufgabe in einem solchen Falle, wo eine der drei bekannten Strecken c, r, R grösser als die Summe der zwei anderen wird, ganz und gar unmöglich, mit sich selbst im Widerspruche ist.

Will man jedoch diesen Widerspruch aufheben, oder eine verwandte, die vorgegebene Aufgabe als einen besonderen Fall in sich begreifende allgemeinere Aufgabe stellen, so kann diese etwa wie folgt lauten:

Es soll (Fig. 46) ein Punkt M dermassen bestimmt werden, dass man zu ihm gelangt, wenn man von einem fixen Punkte O auf einer bestimmten Geraden XX' um eine gewisse Strecke $OP = x$ vorschreitet, und von ihrem Endpunkte P in einer auf dieser

Axe XX' senkrechten *Ebene* 𝔜 auf der zu einer bestimmten Geraden YY' parallelen um eine gewisse Strecke $PM = y$ vorschreitet; und dabei sollen die zwei unbekannten Strecken x, y mit drei gegebenen, direct (entweder positiv oder negativ) beziehlichen Strecken c, r, R so zusammenhängen, wie die (leicht in Worten auszusprechenden) Gleichungen

$$x^2 + y^2 = r^2; \qquad (c - x)^2 + y^2 = R^2$$

ausdrücken, welche sonst auch bestehen, wenn der verlangte Punkt M der Durchschnitt zweier in der Ebene der Geraden XX' und YY' gelegenen Kreislinien von den Halbmessern r, R ist, deren erstere ihren Mittelpunkt im Fixpunkte O, die andere den ihrigen auf der Geraden XX' im Abstande c hat.

Hier lässt sich nun die, als Auflösung der Gleichungen, sich ergebende immer direct beziehliche Strecke

$$x = \frac{c^2 + r^2 - R^2}{2c} = \frac{c}{2} + \frac{(r - R)(r + R)}{2c}$$

jederzeit auf der Axe XX' von O aus construiren, also der Punkt P und die Ebene 𝔜 bestimmen. Allein die nach den zwei Gleichungen bestimmte Strecke

$$y = \pm \frac{1}{2c}\sqrt{(c + r + R)(c + r - R)(c + R - r)(r + R - c)}$$

kann in der Ebene 𝔜 nur so lange vom Punkte P aus parallel zu *der Geraden* YY' aufgetragen werden, als sie *direct* beziehlich ausfällt, folglich der Radicand nicht negativ, sondern positiv beziehlich wird. Ist diess aber nicht der Fall, wird der Radicand negativ beziehlich, also die *Strecke* y *transvers* beziehlich; so muss sie in der Ebene 𝔜 vom Punkte P aus *senkrecht auf der Axe* YY' in die Strecke PM' aufgetragen werden. Mithin lässt sich auch hier noch, also *jedenfalls* der verlangte Punkt M' bestimmen, der wegen der Eindeutigkeit von x und wegen der Doppeldeutigkeit von y zweimal besteht.

Und sonach ist die dergestalt abgeänderte Aufgabe ohne allen Anstand völlig auflösbar; der transvers beziehliche Ausdruck von y lässt eine verständliche Auslegung zu, ohne wie sonst gebräuchlich von einem imaginären Durchschnitte zweier Kreislinien zu sprechen.

In einer andern Weise lässt sich die Aufgabe wie folgt abändern:

Wie müssen die überhaupt wie immer ablenkenden Strecken x, y, in einer fixen Ebene von einerlei Ursprunge O auslaufend, bestimmt werden, wenn sie mit den drei gegebenen direct beziehlichen Strecken c, r, R in der Verbindung stehen, dass die Gleichungen $x^2 + y^2 = r^2$ und $(c - x)^2 + y^2 = R^2$ gelten?

Hier lassen sich nämlich die aus diesen Gleichungen hervorgehenden oben angeführten Ausdrücke von x und y jedenfalls nach den von uns im 5. Hauptstücke erörterten Vorgängen geometrisch construiren.

§. 153.

Ablenkung der Beziehung mehrerer ursprünglich direct beziehlicher bekannter Grössen.

B. Übergehen wir nun auf den *zweiten Fall* (in §. 148), wo *einige* oder *alle* bekannten oder *gegebenen* Grössen, welche ursprünglich direct beziehlich sind, auch complex oder *ablenkend beziehlich* angenommen werden.

Hier nun müssen in der Regel *auch* die *unbekannten* oder gesuchten Grössen *ablenkend beziehlich* ausfallen.

Diess setzt vermöge unserer Ansichten voraus, dass man die Aufgabe, welche auf die vorliegenden Bestimmungsgleichungen führt, dermassen verallgemeinere, dass die ablenkenden Beziehungen der gegebenen und gesuchten Grössen wirklich Bestand haben. In den meisten, wenn nicht in allen, derartigen Fällen dürfte daher wohl kaum anders die Aufgabe sich verallgemeinern lassen, als dass man alle vorkommenden Grössen — gegebene wie gesuchte — durch ablenkende Strecken oder Figuren darstellt.

Beispiel. So würde man die vorige Aufgabe im Allgemeinsten so stellen:

„Man suche zu den, wie immer ablenkend bezogenen Strecken (c), (r), (R), deren Bezeichnungen wir desshalb in Haken einschliessen, zwei andere eben solche (x), (y), so dass sie mit jenen in dem Zusammenhange stehen,

$$(x)^2 + (y)^2 = (r)^2 \text{ und } [(c) - (x)]^2 + (y)^2 = (R)^2.\text{“}$$

Da man hier

$$(x) = \frac{(c)^2 + (r)^2 - (R)^2}{2(c)} \text{ und } (y) = \pm \sqrt{(r)^2 - (x)^2}$$

findet; so wird man zuvörderst aus den Strecken oder Zügen (c), (r), (R) die Züge $(c)^2$, $(r)^2$, $(R)^2$ nach §. 113 herleiten, letztere in den Zug $(c)^2 + (r)^2 - (R^2)$ nach §. 99 aggregiren, und diesen durch $2\,(c)$ nach §. 112 dividiren, und so den Zug (x) erhalten; dann wird man aus dem letzteren nach §. 113 den Zug $(x)^2$ ableiten, diesen von dem Zuge $(r)^2$ abziehen und aus dem als Rest sich ergebenden Zuge $(r)^2 - (x)^2$ nach §. 114 die zweite Wurzel ziehen, wonach der Zug (y) ebenfalls construirt sein wird.

Auf solche Weise muss man vorgehen, wenn man die nichts sagenden Ausdrücke „imaginäre Centrallinie (c), imaginäre Halbmesser (r), (R), imaginäre oder complexe Coordinaten (x), (y) u. dgl.“ vermeiden will.

§. 154.

Ablenkung der Beziehung ursprünglich direct beziehlich angenommener Veränderlichen.

I. Ferner kann man in einer Gleichung *zweier* Veränderlichen x, y, wie in

$$f(x, y) = 0 \quad \text{oder} \quad y = F(x),$$

durch welche gewöhnlich der Lauf einer ebenen *Linie* ausgedrückt wird, so lange diese Veränderlichen nur direct beziehlich sind, und sonach rechtwinklige Coordinaten vorstellen können, dieselben Zahlen x, y in ihrer allgemeinsten Bedeutung nehmen, und zwar *entweder nur eine* allein *oder beide* zugleich; nämlich *entweder* eine solche veränderliche Zahl x, daher auch jeden ihrer particulären Werthe x', x'', x''', ... nur direct beziehlich belassen, die andere y dagegen, so wie auch ihre besonderen Werthe y', y'', y''', ... allgemein ablenkend beziehlich nehmen, *oder* auch beide veränderlichen Zahlen x, y mit einander allgemein ablenkend beziehlich werden lassen.

Im ersten Falle wird die allgemeine Zahlengleichung der Form nach

$$f[x, (y)] = f(x, Y + \downarrow Y) \mathrel{\overline{\overline{\smash{\cdot}}}} 0 \quad \text{oder} \quad (y) \mathrel{\overline{\overline{\smash{\cdot}}}} Y + \downarrow Y \mathrel{\overline{\overline{\smash{\cdot}}}} \mathrm{F}(x);$$

und sie kann noch so angesehen werden, als stelle sie den Lauf einer *Linie* dar, aber nicht mehr einer ebenen, sondern einer *doppelt gekrümmten*, indem man x (Fig. 47) als eine Abscisse ansieht und in ihrem Endpunkte in einer auf ihr senkrechten Ebene die $(y) = Y + \downarrow Y'$ anfangen lässt, deren Bestandstücke Y, Y' zu festgestellten winkelrechten Axen parallel sind. *) Hier allein liesse sich die letztere Veränderliche (y) als eine complexe *Ordinate* zur direct bezogenen Abscisse des zu bestimmenden Punktes betrachten.

Auch könnte man in einer bestimmten Ebene auf der Abscissenaxe der x (Fig. 48) die Abscissen x_0, x_1, x_2, ... abschneiden, dazu den entsprechenden complexen oder ablenkenden Zug $(y) = F[x]$ nach den im 5. Hauptstück gegebenen Vorschriften, also nach und nach (y_0), (y_1), (y_2), ... construiren, und um den Zusammenhang der x und y ersichtlich zu machen, den Endpunkt jeder Abscisse x mit jenem der zugehörigen Ordinate y durch eine Strecke verbinden, so wie auch die Endpunkte der (y_0), (y_1), (y_2), ... mit einer stetigen krummen Linie zusammenziehen.

Im zweiten Falle dagegen kann man bloss in einerlei Ebene sowohl (x) als auch (y) als allgemein ablenkende Strecken darstellen. Aber selbst hier muss man, um den Gang der gleichzeitigen Veränderung von (x) und (y) zu verbildlichen, die erstere Veränderliche (x) nur eine (ebene) Linie, nicht aber die (ganze Constructions-) Ebene bestimmen lassen. Indem man nämlich $(x) = e^{\downarrow\varphi}r$ setzt, kann man z. B. nur den Radiusvector r stetig sich verändern lassen, dagegen den Ablenkungswinkel φ constant voraussetzen, so dass (x) (Fig. 49) einen unbegrenzten Strahl vorstellt, den man nachmals selbst wieder unstetig ändern, namentlich $\varphi = \alpha_0$, α_1, α_2, a_3, ... werden lässt, und so die angehörigen Strahlen $(x) = (x_0)$, (x_1), (x_2), (x_3) .... erhält.

Oder man kann r absatzweise, φ dagegen stetig sich ändern lassen, wodurch man eine Reihe nach einander folgender concentrischer Kreislinien erhält.

Zu jeder solchen Linie (x) wird eine eigene Linie (y) gehören, so dass man auch ein entsprechendes System (y_0), (y_1), (y_2), ..., solcher Linien erhält.

Auch in diesem Falle lässt sich nicht im strengsten Sinne von complexen Coordinaten sprechen.

Überdiess ist es gleichgiltig, ob in der zwischen den Veränderlichen x und y gegebenen Gleichung die constanten Grössen nur direct oder auch ablenkend beziehlich sind.

Beispiel. Die Gleichung $y - y' = a\,(x - x')$,
welche (§. 147, 1. Fr.), so lange keine der darin vorkommenden Grössen complex ist, eine gerade Linie vorstellt, übergeht, wenn *alle* Grössen complex werden, in

$$(y) - (y') = (a)[(x) - (x')] \quad \text{und gibt}$$
$$(y) = (y') - (a)(x') + (a)(x),$$

Construirt man nun zuerst der Ordnung nach die Züge (x'), $-(a)(x')$, (y') und $(y') - (a)(x')$; so weist der letztere, als ein unverrückbarer Zug, stets auf *einerlei Punkt* hin.

*) Vergl. *Wittstein* Üb. d. geom. Darstellung complexer Functionen. Gr. Archiv. VII. 4. S. 417 — 430.

Lässt man danach (x) *einen Strahl bestimmen*, so bestimmt auch $(a')(x)$ einen anderen Strahl, dessen Ablenkungswinkel die Summe der Ablenkungswinkel des Radiusvectorzuges (a) und des Strahles (x) ist; folglich *bestimmt* (y) *den, im Punkte* (y') — $(a)(x)$, *anfangenden* zu dem letzteren Srahle $(a)(x)$ gleichgerichteten (gleichstimmig parallelen) *Strahl*. — *Lässt man* dagegen (x) *eine Kreislinie bestimmen*, so bestimmt $(a')(x)$ eine andere Kreislinie; folglich *bestimmt* (y) *die um den Punkt* (y') — $(a')(x')$ *als Mittelpunkt* mit dem Producte der Moduln von (a) und (x) als Halbmesser *beschriebene Kreislinie*.

Wird dann jener Strahl (x) absatzweise (ruckweise), etwa um gleiche Winkel, umgedreht, so dreht sich auch der zu ihm gleichgerichtete Strahl (y) in gleicher Weise. — Wird ebenso der Halbmesser der Kreislinie (x) absatzweise. etwa um gleiche Längen, vergrössert, so wächst auch der Halbmesser des Kreises (y) in gleicher Weise. — Dort stellen also (x) und (y) *Systeme* (Büschel) *von Strahlen* aus den Punkten 0 und (y') — $(a)(x')$, hier dagegen *Systeme von concentrischen Kreislinien* um eben diese Punkte als Mittelpunkte dar.

II. Sollte aber in einer Gleichung *dreier* Veränderlichen x, y, z, wie in

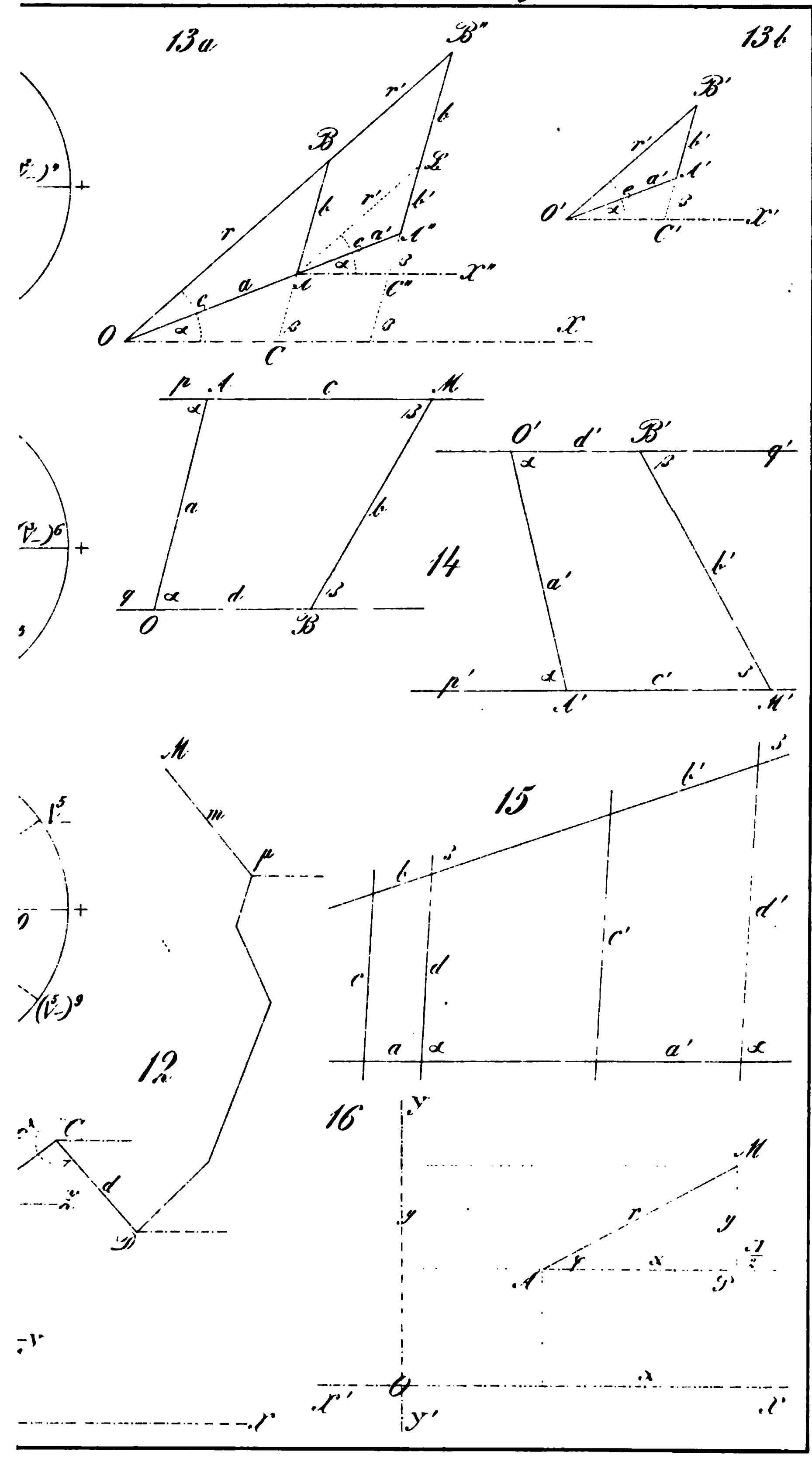
$$f(x, y, z) = \quad \text{oder} \quad z = F(x, y),$$

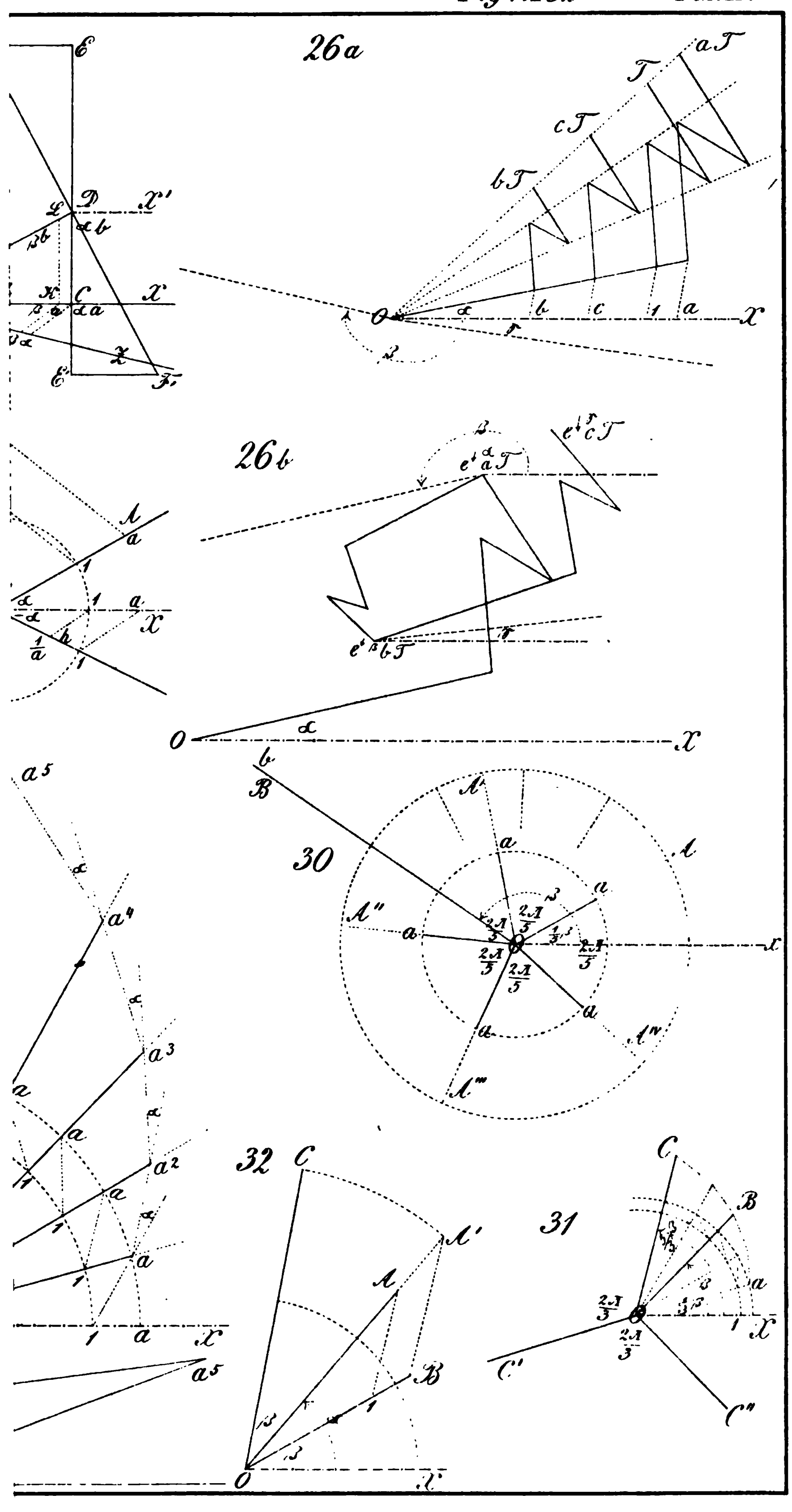
durch welche gewöhnlich der Zug einer *Fläche* ausgedrückt wird, so lange diese Veränderlichen nur direct beziehlich sind, und sonach rechtwinklige Coordinaten vorstellen können, auch nur Eine dieser Zahlen x, y, z, etwa z, in ihrer allgemeinsten Bedeutung $(z) = z' + {,}z''$ genommen werden; so liesse sich der Gang der gleichzeitigen Änderung nur in derselben schwerfälligen Weise wie im vorigen zweiten Falle graphisch darstellen, weil auch hier von zwei unabhängig Veränderlichen x, y zwei andere Veränderlichen z', z'' mit einander zugleich abhängen.

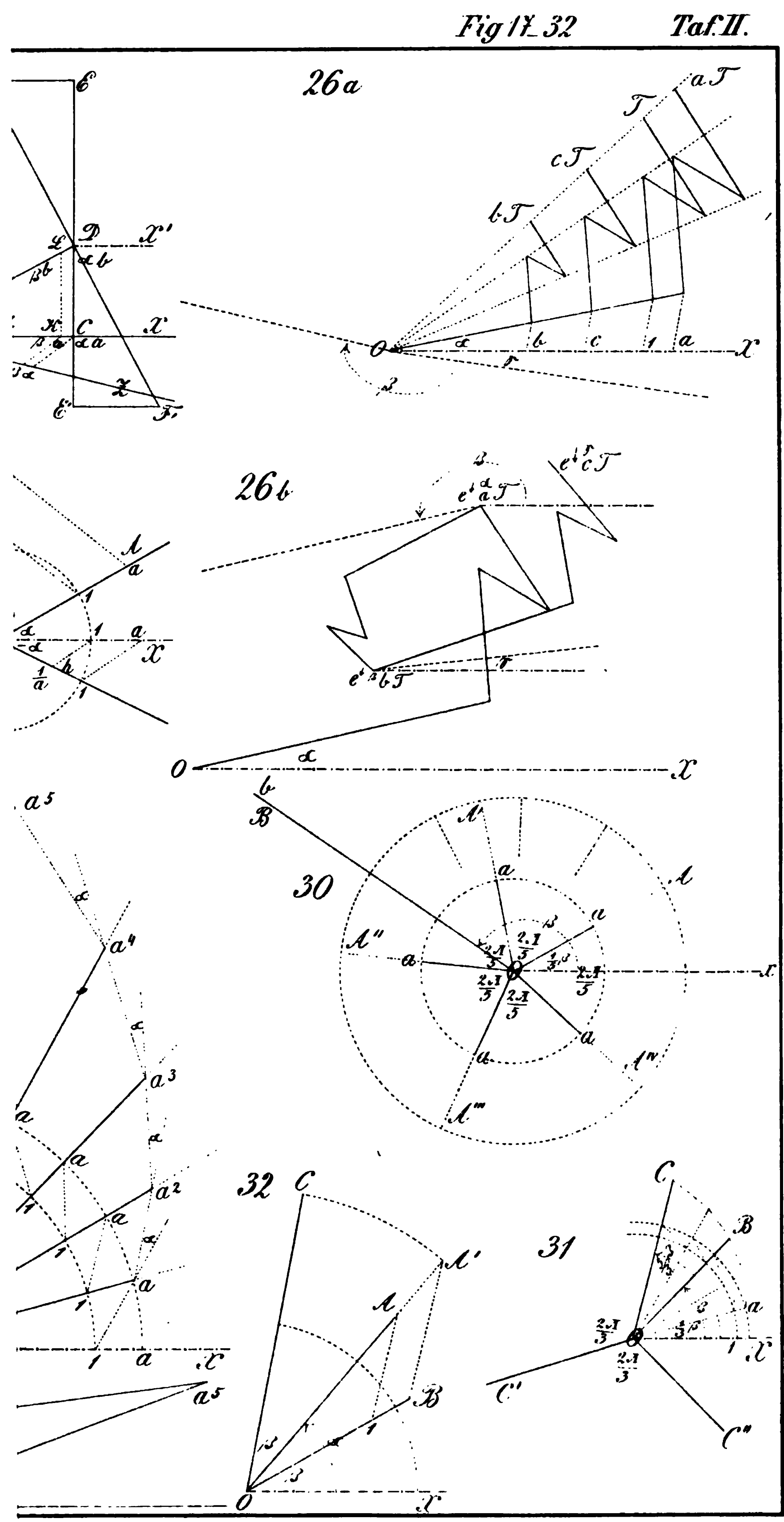
Völlig unmöglich würde aber eine solche raumliche Darstellung, wenn zwei oder alle drei Veränderlichen complex werden sollten.

Bei *mehr als drei* gleichzeitigen Veränderlichen hört die geometrische Verbildlichung auch dann schon auf, wenn sie bloss direct beziehlich sind.

III. Bedient man sich aber der in §. 141 erörterten für jede Menge von Veränderlichen brauchbaren, *tabellarischen* Darstellung der gleichzeitigen Veränderung mehrerer Grössen so zieht das Complexwerden einer Function (abhängig Veränderlichen) gar keine Veränderung nach sich, weil es gleichgiltig ist, ob in das betreffende Fach eine direct oder ablenkend beziehliche, eine einfache oder complexe Grösse eingetragen wird; das Complexwerden einer Grundveränderlichen dagegen hat lediglich das zur Folge, dass statt des einen Tafel-Einganges der direct beziehlichen Grundveränderlichen zwei Eingänge, einer für den direct und der andere für den transvers beziehlichen Antheil der ablenkend beziehlichen nothwendig werden.


13a
13b
14
15
12
16


26a
26b
30
31
32


26a
26b
30
31
32